문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** –

수능 1등급 완성 학습 계획표 [38일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~49		월 일	월 일
2	50~96		월 일	월 일
3	97~156		월 일	월 일
4	157~184		월 일	월 일
5	185~204		월 일	월 일
6	205~225		월 일	월 일
7	B 01~52		월 일	월 일
8	53~88		월 일	월 일
9	89~102		월 일	월 일
10	103~132		월 일	월 일
11	133~148		월 일	월 일
12	C 01~57		월 일	월 일
13	58~97		월 일	월 일
14	98~121		월 일	월 일
15	D 01~51		월 일	월 일
16	52~86		월 일	월 일
17	87~114		월 일	월 일
18	E 01~45		월 일	월 일
19	46~83		월 일	월 일
20	84~106		월 일	월 일
21	107~135		월 일	월 일
22	F 01~60		월 일	월 일
23	61~122		월 일	월 일
24	123~152		월 일	월 일
25	G 01~52		월 일	월 일
26	53~90		월 일	월 일
27	91~126		월 일	월 일
28	127~149		월 일	월 일
29	150~185		월 일	월 일
30	H 01~53		월 일	월 일
31	54~98		월 일	월 일
32	99~143		월 일	월 일
33	144~173		월 일	월 일
34	174~199		월 일	월 일
35	I 01~52		월 일	월 일
36	53~93		월 일	월 일
37	94~121		월 일	월 일
38	모의 1, 2, 3회		월 일	월 일

- 나는 ________________ 대학교 ________________ 학과 __________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 고3 미적분 활용법 $+\alpha$

❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.

❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 비법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

❹ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 단서로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 발상해서 문제 풀이에 적용하는 방법을 익히세요.

❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.

❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제 동영상 강의 QR코드

1. 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
2. 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
3. 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
4. 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!

차 례 [총 158개 유형 분류]

다른 풀이,
쉬운, 톡톡 풀이
대폭 강화

1등급 문제
단서, 발상, 적용
단계별 해설

Ⅰ 수열의 극한

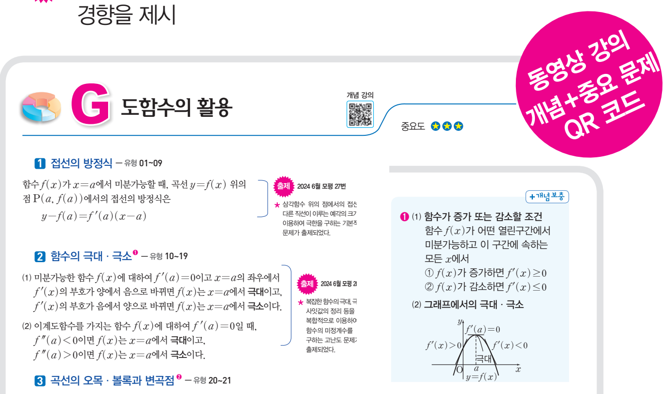
Ⅱ 미분법

개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

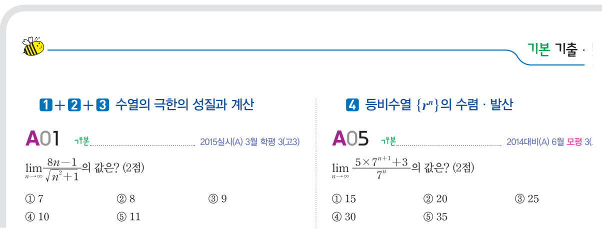
가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ✪✪✪ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2026학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시



2 기본 기출 문제 – 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.



3 경찰대·삼사 기출 문제 – 최신 중요 기출 문제 수록

경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

- **유형 분류** : 출제 – 2026 수능, 평가원에서 출제된 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- **난이도** : ✿✿✿ – 기본 문제, ✿✿✿ – 중급 문제, ✿✿✿ – 중상급 문제, ✿✿✿ – 상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- **출처표시** : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - **2026대비 수능 1(고3)** : 2025년 11월에 실시한 수능
  - **2026대비 6월 모평 2(고3)** : 2025년 6월에 실시한 평가원
  - **2025실시 4월 학평 3(고3)** : 2025년 4월에 실시한 학력평가
  - **2026대비 9월 모평 2(고3)** : 2025년 9월에 실시한 평가원
  - **표시 없는 문제** : 기출 변형 문제

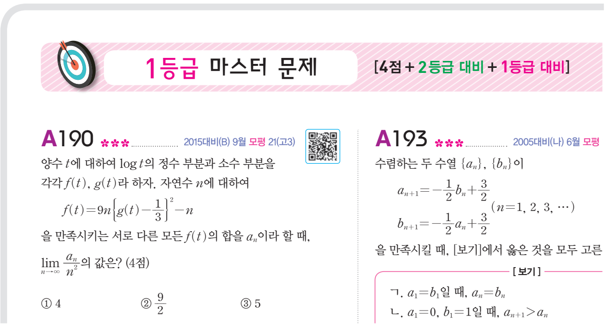
5 미적분 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

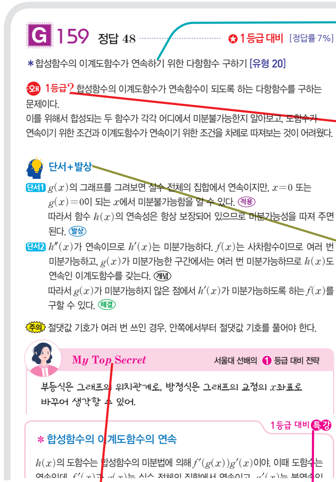
6 1등급 마스터 문제 – 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ✲✲✲ – 상급 문제
- 2등급 대비 – 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 대비 – 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제



7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

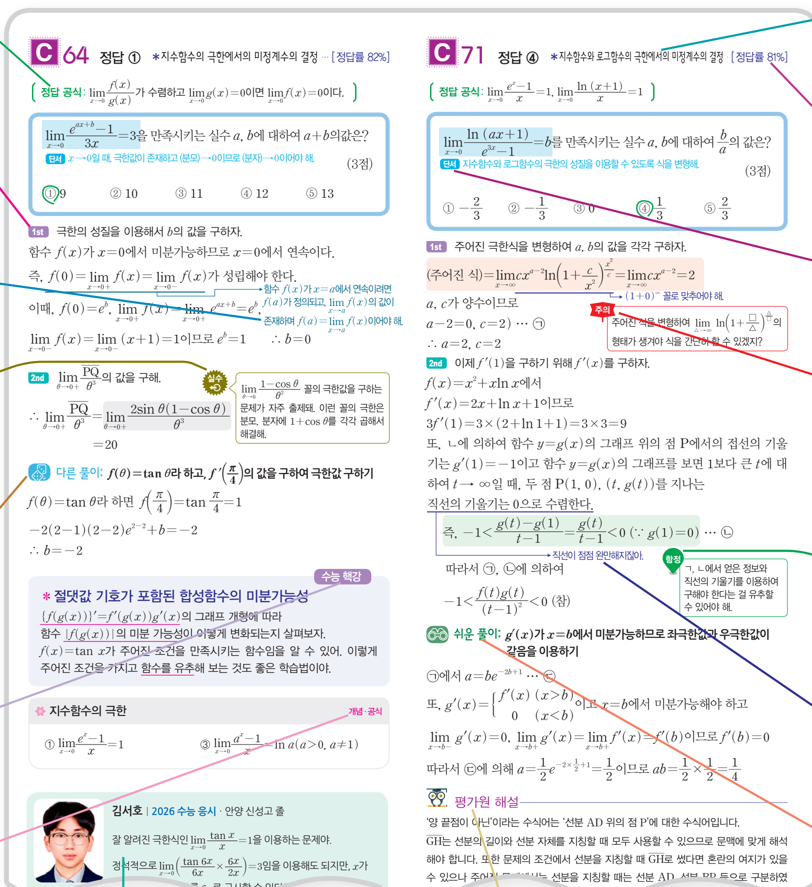
왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!



정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 내신 + 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록 수능, 모의평가, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로 수록하였습니다.
그리고 명강의로 소문난 학교 · 학원 선생님들께서 명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여자고등학교
김대식 경기 하남고등학교
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외국어고등학교
박숙녀 아산 충남삼성고등학교
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 다원교육
신명선 안양 신성고등학교
신현준 안양 신성고등학교
윤장노 안양 신성고등학교
이종석 일등급 수학 저자
이창희 서울 다원교육 고등부
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외국어고등학교
장경호 오산 운천고등학교
장영환 제주 제로링수학교실
장철희 서울 보성고등학교
전경준 서울 풍문고등학교
전준홍 서울 압구정 YEstudy
조승원 수원 경기과학고등학교
지강현 안양 신성고등학교
홍지언 부산대학교 수학 박사과정
홍지우 안양 평촌고등학교
황광희 시흥 시흥고등학교
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]

강태희 파주 한민고등학교
김정수 고양 대치M수학학원
방성의 시흥 초고수수학학원
사공원 의정부 호연지기학원
서봉원 세산 SM수학교습소
이효상 부산 수학솔루션
장용준 의정부 상우고등학교

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널
셀프수학

[특별 감수진]

김연지 세종 소담고등학교
박성종 서울 대치에스학원
박수민 창원 마산고등학교
박장호 대구 대구혜화여자고등학교
배현경 서울 대진고등학교
백신영 서울 (목동)수학을말하다
송유헌 제주 GTSMath
신동우 화성 (동탄)신강수학학원,메가스터디
신원화 울산 우성수학학원
안현정 서울 (강동)구주이배수학학원
이동훈 서울 (대치)프레임수학,(부천)최강수학
이준호 서울 (목동)시대인재
이한샘 광명 진성고등학교
이현웅 서울 (목동)웅수학학원
정유철 포항 동지고등학교
정재훈 구미 구미제일고등학교
황혜숙 창원 합포고등학교

[감수진]

강현아 서울(대치)매쓰테라피
고유정 광주 연제렉스학원
곽재혁 파주 유투엠수학학원
권중우 서울 (송파)구주이배학원
길정균 화성 에듀셀파수학학원
김기정 시흥 (배곧)엠스카이수학학원
김남경 원주 수석학원
김대중 과천 폴인매쓰학원
김도연 구미 그릿수학학원
김도완 안양 (평촌)인어스수학학원
김동민 서울 호크마수학학원
김동윤 광주 티오티(TOT)수학학원
김민정 창원 하나학원
김병규 남양주 생각루트수학학원
김병제 인천 에어매스학원
김상준 수원 엠코드수학학원
김상호 전주 휴민고등수학
김선호 아산 VVS입시학원탕정의대관
김영표 포항 포스매쓰학원
김예찬 울산 학촌학원
김유현 안양 (평촌)청솔학원
김윤경 구리 국빈수학학원
김윤기 가평 가평고등학교
김은교 대전 제타수학전문학원
김인하 김포 통진고등학교
김착한 서울 (성북)미래탐구
김태현 서울 SMC수학학원프라임2관
노치훈 창원 매쓰플랜수학상남학원
류세정 대전 피톤치드수학학원
박경종 서귀포 남주고등학교
박경호 부산 MATHCLASS
박기태 부산 프리미엄수학학원
박병선 창원 매쓰플랜수학학원(상남점)
박선영 고양 (화정)매쓰클루수학학원
박선일 대구 선배수학학원
박수재 창원 창원성민여자고등학교
박승용 문경 점촌고등학교
박제성 청주 박제성수학(PJS Math)
박종구 청주 코사인수학학원
박주은 광주 프리마수학학원
방기홍 청주 엠솔루션수학학원
백은진 순천 백강수학학원
백현우 부산 센텀미래탐구
변지혜 인천 하이에듀학원
서성표 대구 용산김샘학원
서영란 천안 아너스수학학원
서정규 광주 제이큐수학학원
서정화 구미 비전수학학원
성원모 안양 (평촌)헤일로수학
성태훈 양산 영훈교육
송다빈 광주 변국남수학학원
송현혜 대구 학문당믿음수학
신재민 용인 (수지)설연고학원
안경진 안산 더배움수학
오인성 서울 전병훈수학학원
유선형 강릉 PF math수학학원
유슬기 창원 인테그랄수학학원
유용관 인천 정탑학원
유장상 전주 정정일대입전문학원
유창선 대구 (수성)학문당입시학원
유태성 서울 에벤에셀아카데미
윤영민 수원 (영통)엠코드학원
윤영찬 성남 (분당)파인만수지특별관
윤찬근 대전 오르고수학학원
윤혜진 의정부 마스터플랜수학전문학원
이광락 서울 펜타곤학원
이기용 제주 재동학원
이만희 대구 오르라수학전문학원
이성욱 하남 최상위탑수학학원
이영환 부산 마린K1수학학원
이원영 고양 (후곡)FM수학전문학원
이유환 부산 이유환수학학원
이재규 파주 운정고등학교
이정훈 포항 일품수학학원
이종호 서울 매쓰원수학학원
이효상 부산 미래EMS학원
임동호 화성 정현고등학교
임희택 성남 (위례)생각의빛수학학원
장성훈 서울 미독수학
장혜민 성남 우주수학학원
전 일 성남 생각하는수학공간학원
전진형 원주 한셈학원
정내균 부산 이젠수학학원
정다원 광주 인성고등학교
정 영 나주 봉황고등학교
정재환 부산 4프로예감수학학원
조민우 인천 남동프리메카학원
조성근 김포 거미수학
진윤지 광주 더매쓰학원
차무근 용인 차원이다른수학학원
최명옥 서울 꿈이룬수학전문학원
최항석 서울 (목동)PGA전문가집단학원
하태웅 제주 샤in신제주캠퍼스학원
현영하 부산 서울대인학원
황병규 고양 백신고등학교
황영우 서울 명성학원

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
문지원 서울대 의예과
석민준 서울대 첨단융합학과
장현준 서강대 수학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
조선하 서울대 자유전공학부
황대윤 서울대 수리과학부

수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

• 2025년

강다은 대구 계성고 졸(서울대 의예과)
김연우 대구 정화여고 졸(연세대 의예과)
김효원 제주 제일고 졸(서울대 의예과)
박정빈 대구 남산고 졸(서울대 아동가족학과)
배지오 성남 낙생고 졸(연세대 약학과)
백승준 광주숭일고 졸(카이스트 새내기과정학부)
서정후 광주 숭덕고 졸(아주대 의학과)
성예현 대전전민고 졸(건국대 의학과)
안한민 익산 남성고 졸
오현준 서울 한영고 졸(경상대 약학과)
이정근 안양 평촌고 졸(동국대 wise 의예과)
이지원 대구 성화여고 졸(고려대 생명과학부)
임지호 부산 동아고 졸(울산대 의예과)
장윤서 부산 사직여고 졸(중앙대 간호학과)
정규원 부산 남성여고 졸
최승우 광주서석고 졸(서울대 약학계열)
최아람 서울 광영고 졸(서울대 국어교육과)
한규진 대구 계성고 졸(연세대 치의예과)

• 2024년

곽지훈 서울 한영외고 졸(서울대 자유전공학부)
권민재 서울 광영여고 졸(강릉원주대 치의예과)
김동현 안성 안법고 졸(연세대 실내건축학과)
김서현 대전한빛고 졸(카이스트 새내기과정학부)
김신유 익산 남성고 졸(순천향대 의예과)
김아린 대전한빛고 졸(충남대 의예과)
김용희 화성 화성고 졸(단국대 의예과)
김지희 광주 국제고 졸(고려대 한국사학과)
김태현 부산 대연고 졸(서울대 수리과학부)
류이레 광주대동고 졸(연세대 의예과)
문지민 대구 정화여고 졸(고려대 중어중문학과)
변준서 화성 화성고 졸(건국대 수의예과)
심기현 대구 계성고 졸(경북대 의예과)
오서윤 서울 광문고 졸(충남대 의예과)
전성연 부산국제고 졸(서울대 사회학과)
조수근 성남 태원고 졸(순천향대 의예과)

2026 응시


강기헌
천안 천안고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


김서영
서울 잠실여고 졸업
– 생명과학 I


김서호
안양 신성고 졸업
– 고3 미적분


김연준
안성 안법고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


김윤
익산 이리남성여고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


김준성
부산 대연고 졸업
– 화학 II


김준영
서울 강서고 졸업
– 고3 확률과 통계


김준희
부산 동천고 졸업
– 세계지리


박수현
대구 대진고 졸업
– 수능 한국사


박예서
화성 안화고 졸업
– 고3 수학 I, 고3 수학 II


박준서
부산 대동고 졸업
– 지구과학 I


방진환
부산 해운대고 졸업
– 고3 기하


우다솔
서울 중앙고 졸업
– 물리학 I


원강희
대전동산고 졸업
– 화법과 작문 실전


이영서
대구 대진고 졸업
– 생명과학 II


이지민
광주대동고 졸업
– 동아시아사


이현수
부산 대동고 졸업
– 화학 I


임준호
광주 문성고 졸업
– 지구과학 II


임지안
광주 금호중앙여고 졸업
– 문학 실전


전상훈
서울 대원고 졸업
– 독서 실전


전시원
대전 한밭고 졸업
– 언어와 매체 실전


정윤서
부산 사직여고 졸업
– 생활과 윤리


정희주
익산 이리남성여고 졸업
– 윤리와 사상


최경준
광주서석고 졸업
– 한국지리


한기주
화성 삼괴고 졸업
– 고3 수학 I, 고3 수학 II


홍서연
남양주 도농고 졸업
– 사회·문화

문항 배열 및 구성 [1421제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제 (95제)

필수 개념과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록 (1136제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2020~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록 (69제)

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제 (121제)

수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 미적분 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4·5월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2026	8	8	8	8	8	8	8	56	*2027학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2025	8	8	8	8	8	8	8	56	
2024	8	8	8	8	8	8	8	56	
2023	8	8	8	8	8	8	8	56	
2022	8	8	8	8	8	8	8	56	
2021	1	6	9	12	11	11	12	62	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2020	21	16	17	15	15	13	15	112	
2019	24	15	15	12	12	12	12	102	
2018	19	18	13	10	9	13	11	93	
2017	21	15	11	12	9	9	10	87	
2016	13	10	13	13	10	9	9	77	
2015	6	6	9	7	12	0	10	50	
2014	8	7	8	3	8	6	10	50	
2013	8	6	9	3	7	6	4	43	
2012	3	8	8	5	8	4	6	42	
2011이전	10	22	45	13	39	19	53	201	
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								19	
수능 기출 변형 문제								121	
고1/고2 학력평가								13	
경찰대 및 삼사								69	
총 문항 수								1421	

2026학년도 6월, 9월 평가원+수능
미적분 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
23	미적분	A86	미적분	C21	미적분	E11
24		G50		H79		H78
25		B42		A71		A145
26		F118		I42		I69
27		F57		F117		F89
28		F144		F134		H164
29		B129		B127		B126
30		G162		H183		G170

• 미적분 : 2026 자이스토리 고3 미적분

A 수열의 극한

★ 유형 차례

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2026	수능	유형 15 수열의 극한의 대소 관계	☆☆☆
	9월	유형 07 $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정	★☆☆
	6월	유형 10 등비수열의 극한값의 계산	☆☆☆
2025	수능	유형 06 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	★☆☆
	9월	유형 11 등비수열의 극한에서 미지수 구하기	☆☆☆
	6월	유형 10 등비수열의 극한값의 계산	☆☆☆
2024	수능	출제되지 않음	
	9월	유형 11 등비수열의 극한에서 미지수 구하기	★★☆
	6월	유형 06 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	☆☆☆

★ 2026 출제 경향 분석

- 수열의 극한값의 대소 관계를 비교하는 문제가 출제되었다.

[A145 문항]

★ 2027 수능 예측

1. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴, $\infty-\infty$ 꼴 또는 등비수열의 극한값을 구하는 간단한 문제가 해마다 출제되므로 계산 과정에서 실수하지 않도록 주의하자.
2. 극한의 성질과 수열의 대소 관계를 이용하여 새롭게 정의된 수열의 극한값을 구하는 유형은 수열의 극한의 성질을 종합적으로 정확히 알고 적용할 수 있어야 한다.
3. 좌표평면 위의 그래프에 대한 도형의 길이나 넓이 등을 수열로 나타내서 극한값을 구하는 문제에 대비하기 위해 함수의 그래프와 도형의 성질을 유기적으로 연결하여 해결하는 연습을 충분히 하자.

A 수열의 극한

개념 강의

중요도 ★★★

1 수열의 수렴 · 발산 — 유형 01~02, 06~07, 10, 18

(1) **수렴** : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (단, α는 일정한 값) 예 $a_n=\dfrac{1}{n}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

(2) **발산** :
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ (양의 무한대로 발산) 예 $a_n=n$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ (음의 무한대로 발산) 예 $a_n=-n$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$
- 진동 (수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.)

예 $a_n=(-1)^n$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$은 -1과 1로 진동한다.

2 극한값의 계산 — 유형 01~09, 15~22

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴

주어진 수열이 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴인데 수렴할 때, (분자의 차수)>(분모의 차수)인 모양은 분자의 최고차항의 계수에 미지수가 존재하는 경우가 대부분이므로 정리한 최고차항의 계수가 0이 되도록 미지수를 정하면 된다.

① (분자의 차수)>(분모의 차수)
: ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

② (분자의 차수)=(분모의 차수)
: 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.❶

③ (분자의 차수)<(분모의 차수) : 0으로 수렴한다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴

(i) 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.❷

(ii) 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

출제 2026 9월 모평 25번

★ $\infty-\infty$ 꼴의 근호가 포함된 극한의 계산은 유리화를 하고, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 이용하여 계산하는 기초적인 문제가 출제되었다.

3 수열의 극한값의 성질❸ — 유형 01~22

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha\pm\beta$(복호동순)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c\alpha$(단, c는 상수)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$(단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산 — 유형 10~22

(1) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le-1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$은 진동한다. (발산)

출제 2026 6월 모평 23번

★ 등비수열의 수렴에 대한 개념을 바르게 알면 풀 수 있는 간단한 문제가 출제되었다.

5 수열의 극한값의 대소 관계 — 유형 16~18

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.❹

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

출제 2026 수능 25번

★ 수열의 극한값의 대소 관계를 비교하여 극한값을 찾는 문제가 출제되었다.

+개념 보충

❶ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

$f(n)$과 $g(n)$의 차수가 같으면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\dfrac{(f(n)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(n)\text{의 최고차항의 계수})}$

❷ 유리화

유리화는 근호를 제곱하여 없애는 것으로 곱셈 공식 중에서 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

① $\dfrac{A}{\sqrt{B}-C}=\dfrac{A(\sqrt{B}+C)}{B-C^2}$

② $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

③ $\dfrac{\sqrt{A}+B}{C}=\dfrac{A-B^2}{C(\sqrt{A}-B)}$

왜 그럴까?

❸ 수열의 극한값의 성질은 두 수열이 모두 수렴할 때만 성립한다. 만약 수렴하지 않는다면 그 성질을 쓸 수 없다.

예를 들면 $a_n=n$, $b_n=\dfrac{1}{n}$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty\times0$이고

$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\times\dfrac{1}{n}\right)=1$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n\neq\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

한걸음 더!

❹ 수열의 극한값의 대소 관계에서 (1)은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이면 $\alpha\le\beta$가 성립한다.
즉, $a_n<b_n$과 같이 등호가 포함되지 않아도 $\alpha\le\beta$에는 등호가 붙는 것에 주의하자.
예를 들어
$a_n=1+\dfrac{1}{n}$, $b_n=1+\dfrac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$로 같다.

1 + 2 + 3 수열의 극한의 성질과 계산

A01 기본 2015실시(A) 3월 학평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}$의 값은? (2점)

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

A02 기본 2012대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

A03 기본 2011대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A04 기본 2018실시(나) 4월 학평 22(고3)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}b_n=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값을 구하시오. (3점)

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

A05 기본 2014대비(A) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? (2점)

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

A06 기본 2012대비(나) 수능 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}$의 값은? (2점)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A07 기본 2011대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$일 때, 상수 a의 값은? (2점)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

5 수열의 극한값의 대소 관계

A08 기본 2006실시(나) 10월 학평 3(고3)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 004~005p

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

1 + 2 + 3 수열의 극한의 성질과 계산

유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서

(1) (분자의 차수)<(분모의 차수)이면
(극한값)$=0$

(2) (분자의 차수)$=$(분모의 차수)이면
(극한값)$=\frac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$

(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이면
극한값은 존재하지 않는다. (양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산)

tip

1 분모의 차수와 분자의 차수를 비교한다.

2 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{(상수)}}{n}=0$임을 이용한다.

A09 ❀❀❀ 2025실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

A10 ❀❀❀ 2022실시 10월 학평 미적분 23(고3)

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

A11 ❀❀❀ 2022대비 수능 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A12 ❀❀❀ 2021실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A13 ❀❀❀ Pass 2020실시(가) 10월 학평 1(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n(9n-5)}{3n^2+1}$의 값은? (2점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A14 ❀❀❀ 2021대비(가) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? (2점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A15 ❀❀❀ 2020실시(가) 4월 학평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A16 ❀❀❀ 2020대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

A17 ❀❀❀ Pass 2019실시(나) 7월 학평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A18 ❀❀❀ Pass 2020대비(나) 6월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A19 ❀❀❀ Pass 2019대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}$의 값은? (2점)

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

A20 ❀❀❀ Pass 2019대비(나) 6월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A21 ❀❀❀ 2018실시(나) 3월 학평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\right)$의 값은? (2점)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

A22 ❀❀❀ 2023실시 10월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A23 ❀❀❀ 2023실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? (2점)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A205 ✽✽✽ 2015대비(B) 9월 모평 21(고3)

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

A206 ✽✽✽ 2023실시 3월 학평 미적분 29(고3)

자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. (4점)

A207 ✽✽✽ 2007대비(가) 6월 모평 21(고3)

두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+1}{x^{2n}+2}$, $g(x)=\sin(k\pi x)$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않을 때, $60k$의 최댓값을 구하시오. (4점)

A208 ✽✽✽ 2005대비(나) 6월 모평 15(고3)

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\begin{cases} a_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2} \\ b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2} \end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $a_1=b_1$일 때, $a_n=b_n$

ㄴ. $a_1=0$, $b_1=1$일 때, $a_{n+1}>a_n$

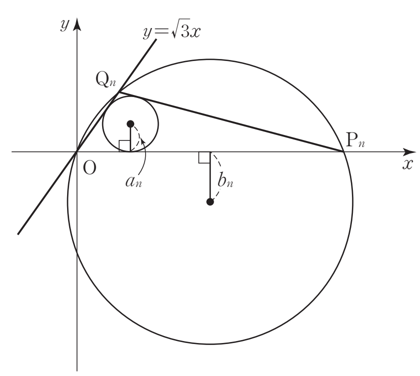
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A209 ✽✽✽ 2014실시(A) 3월 학평 30(고3)

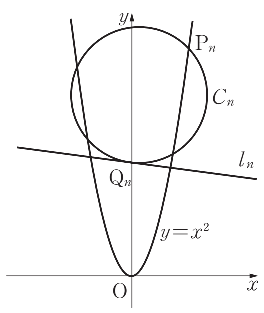
좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=L$이다. $100L$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.) (4점)



A210 ✽✽✽ 2021실시 3월 학평 미적분 29(고3)

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(2n, 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $Q_n(0, 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. (4점)



[1등급 대비+2등급 대비]

A211 ✪1등급 대비 2025실시 3월 학평 미적분 30(고3)

함수 $f(x)$는 $0\le x<2$일 때 $f(x)=x(2-x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) r은 유리수이다.
> (나) 함수 $f(x)$가 $x=a_k$에서 극값을 갖고 $0<a_k<10$인 자연수 k의 개수는 3이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_{n+1}+a_{2n}}{a_{n+1}+a_n}=\frac{81}{10}$일 때, $a_7=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

A212 ✪2등급 대비 2023실시 3월 학평 미적분 30(고3)

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
> $$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. (4점)

A213 ✪1등급 대비 2024실시 3월 학평 미적분 30(고3)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
> (나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
> (다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. (4점)

A214 ✪1등급 대비 2021실시 4월 학평 미적분 30(고3)

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\ (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다.

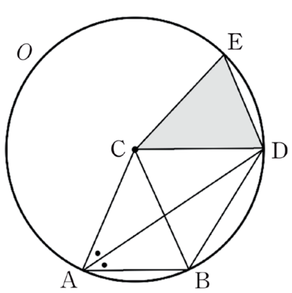
$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오. (4점)

A215 ✪2등급 대비 2025실시 3월 학평 미적분 29(고3)

그림과 같이 자연수 $n(n\geq 2)$에 대하여 중심이 C이고 반지름의 길이가 n인 원 O와 $\overline{\mathrm{AB}}=2$를 만족시키는 원 O 위의 두 점 A, B가 있다. $\angle$BAC를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{2}:1$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}\right)=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)



A216 ✪2등급 대비 2022실시 3월 학평 미적분 30(고3)

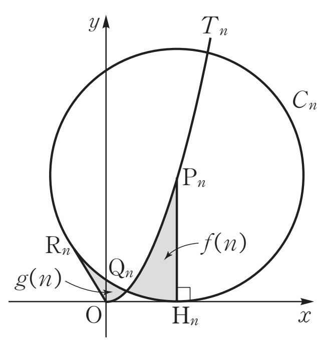
그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n:y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\ (x\geq 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.

점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) (4점)



A217 ✪2등급 대비 2021실시 3월 학평 미적분 30(고3)

자연수 n에 대하여 삼차함수

$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자.

x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

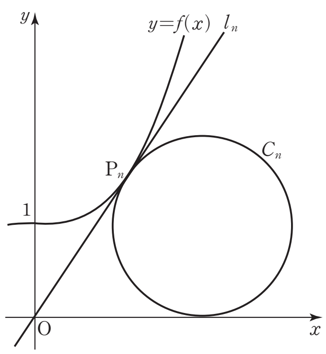
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

A218 ✪1등급 대비 2024실시 3월 학평 미적분 29(고3)

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

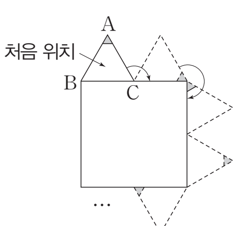
이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. (4점)



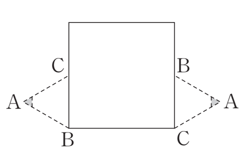
A219 ✪2등급 대비 2008대비(나) 6월 모평 17(고3)

한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은? (4점)



[그림 1]



[그림 2]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

A220 ✪1등급 대비 2010대비(나) 수능 25(고3)

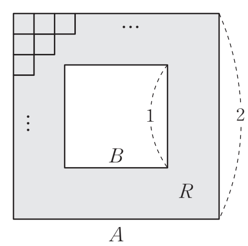
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

> (가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
> (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=12$, $a_3=20$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. (4점)



경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]

A221 ✲✲❀ 2019대비 경찰대 13(고3)

자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=\dfrac{(n!)^4}{(pn)!}$이다. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\alpha$($\alpha$는 0이 아닌 상수)일 때,

$\log_2\alpha$의 값은? (4점)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

A222 ✲✲❀ 2020대비 경찰대 5(고3)

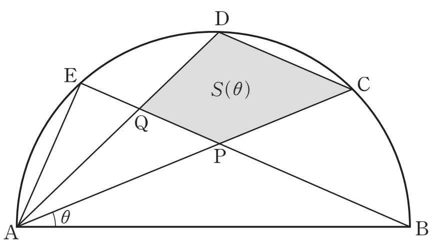
자연수 k에 대하여 $a_k=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^nk+4k^{n+1}}$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값은? (4점)

① 16 ② 20 ③ 21
④ 25 ⑤ 50

A223 ✲✲❀ 2026대비 삼사 미적분 28

그림과 같이 $\overline{AB}=3$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 서로 다른 세 점 C, D, E를 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE=\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 AC, AD가 선분 BE와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 CDQP의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$ (4점)



① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

A224 ✲✲❀ 2019대비 경찰대 19(고3)

함수

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-x^{-2n})}{x^{2n}+x^{-2n}} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 방정식 $f(x)=(x-k)^2$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 실수 k의 범위는 $a<k<b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (5점)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

A225 ✲✲❀ 2017대비 경찰대 10(고3)

좌표평면에서 직선 $y=nx$ (n은 자연수)와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 A_n, B_n이라 하자. 원점 O와 A_n의 중점을 P_n이라 하고, $\overline{A_nP_n}=\overline{B_nQ_n}$을 만족시키는 직선 $y=nx$ 위의 점을 Q_n이라 하자. (단, Q_n은 원 외부에 있다.) 점 Q_n의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|na_n+b_n|$의 값은? (4점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 095~098p

★ 미적분

실전 기출 모의고사

[8문항형 / 제한시간 40분]

5지선다형

1회 01 ❀❀❀ 2010대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

1회 02 ✿❀❀ 2007대비(나) 9월 모평 12(고3)

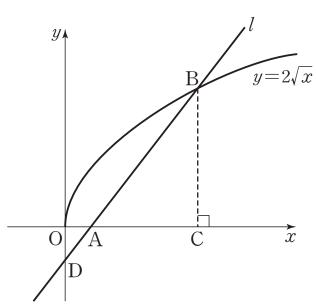
수열 $\{a_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 수렴하지 않는 급수는? (3점)

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ ⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$

1회 03 ❀❀❀ 2014대비(B) 6월 모평 8(고3)

점 A$(1, 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자. 점 B$(t, 2\sqrt{t})$에 대하여 삼각형 BAC의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f'(9)$의 값은? (3점)



① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$

④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

1회 04 ✿❀❀ 2004실시(가) 10월 학평 27(고3)

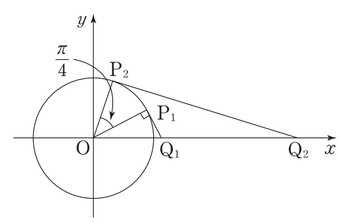
자연수 n에 대하여 구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+1}\sin x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (3점)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

1회 05 ✿❀❀ 2007대비(가) 수능 28(고3)

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_1이라 할 때, 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다. 점 P_1을 원점 O를 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_2라 하자. 삼각형 P_2OQ_2의 넓이는? (단, 점 P_1은 제1사분면 위의 점이다.) (3점)

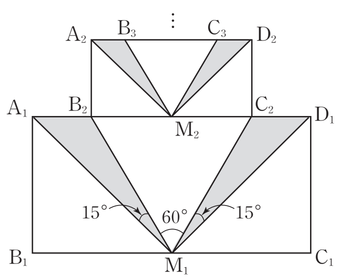


① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

1회 06 ✽✽✽ 2011대비(나) 수능 10(고3)

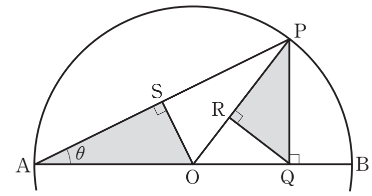
$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15°$, $\angle B_2M_1C_2=60°$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15°$, $\angle B_3M_2C_3=60°$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?
(4점)



① $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{4+\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{7-\sqrt{3}}{8}$

단답형

1회 07 ✽✽✽ 2012대비(가) 수능 27(고3)



그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 R, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle PAQ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 AOS의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{q}{p}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

1회 08 ✪ 1등급 대비 2017대비(가) 6월 모평 30(고3)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=f(-x)$
> (나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여
$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때, $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

모의고사 1회

❖ 정답 및 해설 686~690p

차 례

해설편 1

해설편 2

A 수열의 극한

기본 기출 문제

A 01 정답 ② *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ··········· [정답률 92%]

(정답 공식: 분모, 분자를 n으로 나눠서 $\frac{1}{\infty}\to 0$을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}$의 값은? (2점) 단서 무리식이 있다고 무조건 유리화하는 게 아니야. 이 문제는 유리화하지 않고 바로 구할 수 있어.

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

1st 분모, 분자를 모두 n으로 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{8}{1}=8$$

분모, 분자에 $\frac{1}{n}$을 곱한 거야. $\frac{1}{n}$을 근호 안으로 넣게 되면 $\frac{1}{n^2}$이 되는 것에 주의하자.

A 02 정답 ③ *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ··········· [정답률 95%]

(정답 공식: 분모, 분자를 n^2으로 나눠서 $\frac{1}{\infty}\to 0$을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눠서 구해.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

1st $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모와 분자를 분모의 최고차항으로 각각 나눠봐.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지?

쉬운 풀이: 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분모와 분자의 차수가 같으므로 최고차항의 계수의 비로 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}=\frac{3}{2}$$

A 03 정답 ② *$\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산 ········· [정답률 90%]

(정답 공식: 근호가 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 유리화해본다.)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$의 값은? (2점) 단서 무리식이 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 무리식을 유리화해서 극한값을 구해.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 무리식을 포함한 수열의 극한은 유리화하자.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+11}-n)(\sqrt{n^2+4n+11}+n)}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+11-n^2}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누어 계산해.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

A 04 정답 4 *수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산 ······ [정답률 93%]

(정답 공식: $n\to\infty$일 때 수렴하는 두 수열의 합 또한 수렴한다.)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}b_n=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값을 구하시오. (3점) 단서 수열의 극한의 성질을 이용하여 계산하면 돼.

1st 수열의 극한의 성질을 이용하여 계산해.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=2+2\times1=4$$

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n$ (단, k는 상수)
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

A 05 정답 ⑤ *등비수열의 극한값의 계산 ··········· [정답률 94%]

(정답 공식: 분모, 분자를 7^n으로 나눠서 $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? (2점) 단서 분모, 분자를 7^n으로 각각 나누고, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$임을 이용해.

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

1st 7^n으로 분모, 분자를 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\left(5\times7+\frac{3}{7^n}\right)=35$$

분모, 분자에 r^n을 포함한 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱으로 분자와 분모로 나누어 계산해.

A 06 정답 ④ *등비수열의 극한값의 계산 ··········· [정답률 91%]

(정답 공식: 분모, 분자를 5^n으로 나눠서 $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}$의 값은? (2점) 단서 분모에서 밑이 가장 큰 5^n으로 분모, 분자를 나누어 극한값을 계산하자.

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1st 밑이 가장 큰 5^n으로 분모, 분자를 나누자.

$\frac{5^{n+1}}{5^n}=\frac{5\cdot5^n}{5^n}=5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(5+\frac{2}{5^n}\right)}{5^n\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+2\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5$$

A 07 정답 ③ *등비수열의 극한에서의 미정계수 …… [정답률 81%]

(정답 공식: 분모, 분자를 6^n으로 나눠서 $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$일 때, 상수 a의 값은? (2점)

단서 r^n이 포함된 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이니까 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 6^n으로 분모, 분자를 각각 나눠서 극한값이 4가 되도록 a의 값을 구해.

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

1st 6^n으로 분모, 분자를 각각 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6a-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=6a=4$$

$0<\frac{5}{6}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴·발산 개념·공식

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)
② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)
③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)
④ $r\le -1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n$은 진동 (발산)

A 08 정답 ② *수열의 극한의 대소 관계 …… [정답률 84%]

(정답 공식: 부등식의 각 변을 n으로 나눠서 a_n의 범위를 찾은 후 부등식에 극한을 취해서 극한값을 구한다.)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? (2점)

단서 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구해야 하니까 주어진 부등식을 $x_n<a_n<y_n$ 꼴로 고친 다음 각 변에 극한을 취해.

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 부등식을 변형해 보자.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족하므로 각 변을 자연수 n으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n+4}{n}$$

각 변에 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}\le\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}$$

$a_n<b_n$이더라도 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$인 경우가 있으므로 $a_n<b_n$의 양변에 극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty} b_n$이야.

2nd 극한값의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구해.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}=2$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$야.

$\lim_{n\to\infty} a_n=2$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 09 정답 ① *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 …… [정답률 95%]

(정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분자와 분모의 최고차항의 계수를 비교한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1}$의 값은? (2점)

단서 분모의 최고차항 n^2으로 분자와 분모의 각 항을 나누어 봐.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

1st 극한값을 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

분자와 분모에서 최고차항이 n^2으로 동일하므로 n^2으로 분자와 분모의 각 항을 나누자.

다른 풀이: 계수의 비로 극한값 구하기

분자와 분모에서 최고차항이 n^2으로 동일하지?
분모, 분자의 n^2의 계수의 비로 극한값을 구할 수 있으므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1}=\frac{1}{4}$$

A 10 정답 ① *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 …… [정답률 92%]

(정답 공식: 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n=a+(n-1)d$이다.)

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}$의 값은? (2점)

단서 첫째항과 공차가 주어졌으니까 등차수열의 일반항 a_n을 구할 수 있어.

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

1st 등차수열의 일반항을 구하여 주어진 극한값을 계산하자.

첫째항이 1이고, 공차가 2인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면

$a_n=1+2(n-1)=2n-1$

[등차수열]
첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항
$a_n=a+(n-1)d$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용한 거야.

A 11 정답 ⑤ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ············ [정답률 95%]

(**정답 공식:** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

단서 분모, 분자에 각각 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자에 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\underbrace{\frac{5+0}{1-0}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0}=5$$

다른 풀이: 분모, 분자에 각각 n^3을 곱하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 바꾸어 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{n^2-2}=5$$

분모, 분자에 각각 n^3을 곱하면 분자, 분모가 모두 다항식이고 차수가 같게 돼.

양예진 이화여대 의예과 2022년 입학 · 전북 상산고 졸

미적분의 시작을 알리는 첫 문항! 다행히 기출에서 많이 출제되던 수열의 극한값을 계산하는 문항이라 가볍게 선택 과목을 시작할 수 있었지. 가장 중요한건 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이라는 걸 알고 있어야 한다는 거야. 분모, 분자에 각각 n을 곱하면 0으로 수렴하는 항과 상수가 되는 항들이 구분되겠지? 어떤 항들이 0으로 수렴하게 되는지 파악하는 연습을 하면 가볍게 풀 수 있는 문제였어.

A 12 정답 ⑤ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ············ [정답률 98%]

(**정답 공식:** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눠서 구해.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자를 n^3으로 나눈 후 극한값을 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{10}{1\times 2}=5$$

분모를 모두 전개할 필요없이 n에 대한 일차식과 이차식의 곱이므로 최고차항은 n^3임을 확인할 수 있어.

쉬운 풀이: 최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모와 분자의 차수가 같으면 극한값은 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비로 바로 구할 수 있어.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}=\frac{10}{1\times 2}=5$$

A 13 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ············ [정답률 98%]

(**정답 공식:** 분모, 분자의 최고차항의 차수가 같으면 극한값은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$로 구한다.)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(9n-5)}{3n^2+1}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이지? 분모, 분자의 최고차항의 차수를 비교하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 분자, 분모의 최고차항의 차수가 같음을 이용하여 극한값을 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(9n-5)}{3n^2+1}=\frac{9}{3}=3$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 분자와 분모의 최고차항의 차수가 같으니까 최고차항의 계수의 비로 바로 구할 수 있어.

A 14 정답 ④ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ············ [정답률 96%]

(**정답 공식:** 분자의 차수와 분모의 차수가 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$로 극한값을 구한다.)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? (2점)

단서 분자의 식을 전개하고, 정리한 후 극한값을 구하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분자를 전개한 후 극한값을 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+5}=\frac{8}{2}=4$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

A 15 정답 ④ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ············ [정답률 95%]

(**정답 공식:** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 (분자의 차수)=(분모의 차수)이면 극한값은 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비이다.)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모, 분자의 차수가 같으므로 최고차항의 계수의 비로 구할 수 있어.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비야.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}=\frac{8}{2}=4$$

[$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산]

(1) (분모의 차수)>(분자의 차수) : (극한값)=0

(2) (분모의 차수)=(분자의 차수) :

(극한값)=$\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$

(3) (분모의 차수)<(분자의 차수) : 극한값이 존재하지 않는다.

A 16 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 97%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$의 값은? (2점) 단서 주어진 극한은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 계산해.

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

1st 분모, 분자를 n으로 각각 나누어 극한값을 구해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{4}{n^2}}}{5-\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{9+0}}{5-0}=\frac{3}{5}$$

주의 n이 근호 안에 들어갈 때, n^2으로 들어가야 해.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

쉬운 풀이: **최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기**

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모와 분자의 차수가 같으면 최고차항의 계수의 비로 극한값을 구할 수 있어.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}=\frac{\sqrt{9}}{5}=\frac{3}{5}$$

A 17 정답 ⑤ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 96%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{2n^2+1}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 분모, 나눠서 구해.

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1st 분자와 분모를 각각 분모의 최고차항인 n^2으로 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{5-0}{2+0}=\frac{5}{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

A 18 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 95%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈 후 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 계산하면 돼.

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1st 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9n^2+4n+1}{n^2}}}{\frac{2n+5}{n}}$$

분자 $\sqrt{9n^2+4n+1}$을 n으로 나눌 때, 근호 안에 n^2이 들어감을 주의해야 해. 즉, $\sqrt{\frac{9n^2+4n+1}{n^2}}$이 되는 거야.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{\sqrt{9+0+0}}{2+0}=\frac{3}{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

쉬운 풀이: **최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기**

(분모의 차수)=(분자의 차수)이므로 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 구하는 극한값이야.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5}=\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}=\frac{\sqrt{9}}{2}=\frac{3}{2}$$

A 19 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 96%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눠서 구해.

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

1st 분모, 분자를 n^2으로 나눈 후 극한값을 구해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{6-0}{2+0}=3$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0$이지?

주어진 극한식에서 분모의 최고차항이 n^2이므로 분모, 분자를 n^2으로 각각 나누어주면 돼.

쉬운 풀이: **최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기**

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모와 분자의 차수가 같으면 극한값은 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비로 구할 수 있어.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}=\frac{6}{2}=3$이야.

A 20 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 98%]

정답 공식: 분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눠서 구해.

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1st 분모, 분자를 각각 n^2으로 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$$

주어진 극한식에서 분모의 최고차항이 $2n^2$이므로 분모, 분자를 각각 n^2으로 나누어 계산해.

$$=\frac{3+0+0}{2+0}=\frac{3}{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

I 97 정답 ① *곡선의 길이 [정답률 55%]

(**정답 공식**: 닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다.)

단서 $\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$를 이용해. 이때, 주어진 곡선 식에 절댓값이 포함되어 있으니 x의 값의 범위를 $x\ge0$일 때와 $x<0$일 때로 나누어 생각해야 해.

$x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는? (3점)

① $\frac{23}{8}$　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{29}{8}$　④ 4　⑤ $\frac{35}{8}$

1st x의 값의 범위를 나누어 주어진 곡선의 식을 절댓값이 없는 식으로 정리해.

곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$에서

주의 $x\ge0$이면 $e^x\ge1$이므로 $e^x-1\ge0$
$x<0$이면 $e^x<1$이므로 $e^x-1<0$

$x\ge0$일 때,

$y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)=\frac{1}{2}(e^x-1-e^x+1)=0$

$x<0$일 때,

$y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)=\frac{1}{2}(1-e^x-e^{-x}+1)$

$=\frac{1}{2}(2-e^x-e^{-x})$

2nd 곡선의 길이를 구하자.

$x\ge0$일 때, $\frac{dy}{dx}=0$이고,

주의 $\frac{dy}{dx}=0$이라고 해서 곡선의 길이도 0이라고 생각하지 않도록 유의하자.

$x<0$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(-e^x+e^{-x})$이므로

$(e^x)'=e^x,\ (e^{-x})'=e^{-x}(-x)'=-e^{-x}$

구하는 곡선의 길이는

$\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4}(-e^x+e^{-x})^2}\,dx+\int_0^1\sqrt{1+0^2}\,dx$

$1+\frac{1}{4}(-e^x+e^{-x})^2$
$=1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2\times e^x\times e^{-x}+e^{-2x})$
$=1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$
$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})$
$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2\times e^x\times e^{-x}+e^{-2x})$
$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

$=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}\,dx+\int_0^1 1\,dx$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0,\ e^{-x}>0$이므로 $e^x+e^{-x}>0$이야.

$=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx+\int_0^1 1\,dx$

$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{-\ln 4}^{0}+\Big[x\Big]_0^1$

$=\frac{1}{2}\{(e^0-e^0)-(e^{-\ln 4}-e^{\ln 4})\}+1$

$e^{-\ln 4}=4^{-\ln e}=4^{-1}=\frac{1}{4}$
$e^{\ln 4}=4^{\ln e}=4$

$=\frac{1}{2}\left\{(1-1)-\left(\frac{1}{4}-4\right)\right\}+1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}+1=\frac{23}{8}$

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

I 98 정답 ② *곡선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 [정답률 35%]

(**정답 공식**: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? (4점)

단서1 $f'(x)$를 바로 적분할 수 없고 $xf'(x)$는 적분가능해.

단서2 함수 $y=f(x)$에서 $x=t$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$야.

단서3 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $t_1<x<t_2$일 때 $f(x)>g(x)$이면 $\int_{t_1}^{t_2}\{f(x)-g(x)\}dx$

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$　④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

1st $f''(x)$를 이용하여 곡선 $f(x)$의 그래프를 해석해.

$f'(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}<0$

함수 $f(x)$의 그래프는 $x>0$에서 위로 볼록이므로

$x=t(t>0)$에서의 접선은 곡선 $f(x)$ 위에 있고,

점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점은

점 $(t, f(t))$ 하나뿐이다.

2nd $x=t$에서 접선의 방정식을 이용해서 넓이 $g(t)$의 식을 구해.

$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$의 식의 양변에 x를 곱하여 적분하면

$\int_0^t xf'(x)\,dx=\int_0^t\left(-x^2+xe^{1-x^2}\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^t=-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$ ⋯ (*)

이고, 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로

$g(t)=\int_0^t\{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$

$=\left[\frac{f'(t)}{2}x^2+\{f(t)-tf'(t)\}x\right]_0^t-\int_0^t f(x)\,dx$

$=\frac{f'(t)}{2}t^2+\{f(t)-tf'(t)\}t-\Big[xf(x)\Big]_0^t+\int_0^t xf'(x)\,dx$

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$=\frac{f'(t)}{2}t^2+tf(t)-t^2f'(t)-tf(t)+\int_0^t x\left(-x+e^{1-x^2}\right)dx$

$\int_0^t(-x^2)dx+\int_0^t xe^{1-x^2}dx=-\frac{1}{3}t^3-\left[\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^t$

$=-\frac{f'(t)}{2}t^2+\int_0^t x\left(-x+e^{1-x^2}\right)dx$　$=-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$

함정 피적분함수가 곱의 꼴이면서 치환적분을 이용할 수 없을 때, 다음과 같이 부분적분법을 이용해.
$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$-\frac{t^2}{2}\left(-t+e^{1-t^2}\right)$
$=\frac{1}{2}t^3-\frac{t^2}{2}e^{1-t^2}$

$=-\frac{f'(t)}{2}t^2+\left(-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}\right)$ (*)의 결과를 이용하자.

$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$ ⋯ ㉠

㉠의 식을 미분하면

$g'(t)=\frac{1}{2}t^2+t^3e^{1-t^2}$ ⋯ ㉡

3rd ㉠, ㉡의 식에 $x=1$을 대입해서 $g(1)+g'(1)$의 값을 구해.

㉠의 식에 $x=1$을 대입하면

$$g(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e$$
$$=-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e$$

㉡의 식에 $t=1$을 대입하면

$$g'(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

따라서

$$g(1)+g'(1)=\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e\right)+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$$

김효원 | 서울대 의예과 2025년 입학 · 제주 제일고 졸

개인적으로 이번 수능의 모든 문제를 통틀어서 가장 끙끙 앓았던 문제였어. $g(1)$을 구하려면 $f'(x)$를 두 번이나 적분해야 하는데, e^{1-x^2}은 두 번은커녕 한 번 적분하는 것도 우리가 배운 적분법으로는 불가능한 것이었거든. 하지만 $f(x)$를 구하지 않고도 문제를 해결하는 아이디어를 떠올리기만 한다면 생각보다 쉽게 풀리는 문항이기도 해. e^{1-x^2} 앞에 x가 곱해져만 있다면 부분적분법을 이용하여 적분이 쉽게 될 수 있는 아이디어야. 이걸 생각해내기는 어렵고, 기출 문제를 많이 풀어보면서 이러면 계산이 쉽게 될텐데라는 바람(?)으로 주어진 식의 양변에 x를 한번 곱해보자고 생각할 수도 있고, 1은 어디에나 곱해져 있으니 1과 $f(x)$로 부분적분을 해보자고 생각할 수도 있어. 어쨌든, 치환적분도 안 먹히면 부분적분을 반드시 고려해야 해!

I 99 정답 ⑤ *넓이를 이용한 정적분의 활용 ·········· [정답률 31%]

정답 공식: $y=f(x)$와 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프를 그리고 사다리꼴의 넓이와 비교하여 [보기]의 참, 거짓을 판별한다.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> **단서1** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 지나.
>
> (가) $f(0)=1$, $f(1)=2$
>
> (나) $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ (단, $0<x<1$)
>
> **단서2** 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록해.

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (4점)

> [보기]
>
> ㄱ. 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다.
>
> ㄴ. $\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}dx<3$
>
> ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\ge\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

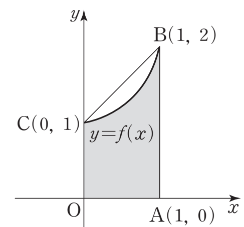
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 구간 $(0,\ 1)$에서 $y=\{f(x)\}^2$의 이계도함수의 부호를 이용하여 볼록의 방향을 판별하자.

ㄱ. $y=\{f(x)\}^2$에서 $y'=2f(x)f'(x)$이고
$y''=2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)$
또, $f(0)=1$, $f(1)=2$이고, $f'(x)>0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 구간 $(0,\ 1)$에서 $1\le f(x)\le 2$이다.
이때, 조건 (나)에 의해 구간 $(0,\ 1)$에서
$f'(x)>0$, $f''(x)>0$이므로 $y''>0$이다.
따라서 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다. (참)
어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하고 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록해.

2nd $1-x=t$로 치환하여 ㄴ을 따져보자.

ㄴ. $1-x=t$라 하면 $x=0$일 때 $t=1$,
$x=1$일 때 $t=0$이고, $\frac{dx}{dt}=-1$이므로



$$\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(t)dt$$
$$=\int_0^1 f(t)dt$$

$\therefore \int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_0^1 f(x)dx$ ··· ㉠

또한, 두 조건 (가), (나)에 의해 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다. $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,1)$, $(1,2)$를 지나고 구간 $(0,1)$에서 증가하며 아래로 볼록해.

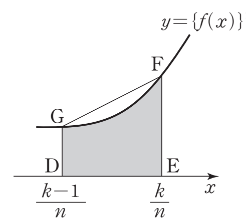
따라서 $\int_0^1 f(x)dx$의 값은 어두운 부분의 넓이이고, 이것은 사다리꼴 OABC의 넓이보다 작고 사다리꼴 OABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$이므로 $\int_0^1 f(x)dx<\frac{3}{2}$

$\therefore 2\int_0^1 f(x)dx<3$ ··· ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$ (참)

3rd 대소를 비교하자.

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 아래로 볼록이므로 사다리꼴 DEFG의 넓이는 색칠한 부분의 넓이보다 크거나 같다.



$$\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\times\frac{1}{n}$$
$$\ge\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2dx$$

실수 그래프가 아래로 볼록하므로 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이보다 사다리꼴의 넓이가 더 클 수밖에 없어.

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\times\frac{1}{n}\ge\int_0^1\{f(x)\}^2dx \text{ (참)}$$

$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2$
$=\int_0^{\frac{1}{n}}\{f(x)\}^2dx+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\{f(x)\}^2dx$
$+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정적분의 성질 (개념·공식)

세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ (복호동순)

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

I 100 정답 ② *넓이를 이용한 정적분의 활용 ······ [정답률 34%]

정답 공식: $x<0$일 때 함수 $f(x)$의 그래프를 그리고 주어진 조건을 이용하여 $x\ge0$일 때 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

단서 1 $x\to 0-$일 때, $f(x)\to 0$이야.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.

단서 2 모든 양수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점이 항상 2개야.

두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$ (k는 상수)

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$일 때, $\dfrac{f(9)}{f(8)}$의 값은? (4점)

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

1st 주어진 조건을 이용하여 $x\ge0$일 때 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이므로

$(fg)'=f'g+fg'$, $\{e^{f(x)}\}'=e^{f(x)}\times f'(x)$

$f'(x)=-4\times e^{4x^2}-4x(e^{4x^2}\times8x)$

$=-4e^{4x^2}-32x^2e^{4x^2}<0$

$x<0$인 모든 x에 대해 $e^{4x^2}>0$, $x^2>0$

즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

또한, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이고 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x\ge0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

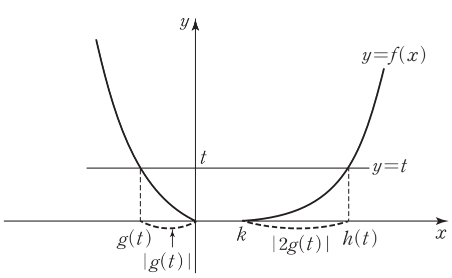
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점은 $x<0$인 구간과 $x\ge0$인 구간에 각각 1개씩 존재해.

방정식 $f(x)=t$의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하므로 $g(t)<0$, $h(t)\ge0$이고,

모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$ (k는 상수), 즉 $h(t)=k-2g(t)$가 성립하므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



2nd 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 $\int_0^7 f(x)dx$의 값을 이용하여 $f(8)$, $f(9)$와 같은 함숫값을 각각 찾아.

$\int_0^7 f(x)dx=\int_k^7 f(x)dx=e^4-1$에서 $h(t_1)=7$이라 하면

$\int_{g(t_1)}^0 f(x)dx=\frac{1}{2}(e^4-1)$, 즉

가로의 길이가 같고 세로의 길이가 $\frac{1}{2}$배인 직사각형들의 합이라고 생각하면 이해가 쉬워.

$\int_{g(t_1)}^0 (-4xe^{4x^2})dx=\frac{1}{2}(e^4-1)$이다.

$(4x^2)'=8x=(-4x)\times(-2)$이므로

$\int_{g(t_1)}^0 (-4xe^{4x^2})dx=-\frac{1}{2}\int_{g(t_1)}^0 (8xe^{4x^2})dx$

$(4x^2)'$

$=-\frac{1}{2}\left[e^{4x^2}\right]_{g(t_1)}^0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4\{g(t_1)\}^2}$

이 값이 $\frac{1}{2}(e^4-1)$이어야 하므로

$\{g(t_1)\}^2=1$

$\therefore g(t_1)=-1$ ($\because g(t_1)<0$)

$2g(t_1)+h(t_1)=k$에서 $k=2\times(-1)+7=5$이므로

$2g(t)+h(t)=5 \Rightarrow g(t)=\dfrac{5-h(t)}{2}$

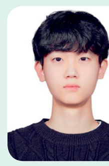
위 식에 $h(t)=8$, $h(t)=9$를 각각 대입하면

$g(t)=-\frac{3}{2}$, $g(t)=-2$이므로

$f(8)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(9)=f(-2)$이다.

$\therefore \dfrac{f(9)}{f(8)}=\dfrac{f(-2)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{-4(-2)e^{4(-2)^2}}{-4\left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}$

$=\frac{4}{3}e^{16-9}=\frac{4}{3}e^7$



오서윤 | 충남대 의예과 2024년 입학 · 서울 광문고 졸

'모든 양수 t에 대해서'라는 말을 통해 항등식을 끌어낼 수 있어. 양수 범위의 함수에 대해서는 모르니까 $x<0$인 부분의 함수를 $p(x)$라 놓고 이를 통해 $x\ge0$인 부분의 함수 $r(x)$를 작성해야겠다고 생각했어. $p(g(t))=r(h(t))=t$라는 항등식을 통해 문제 조건에서 주어진 식을 대입하고 엮어 해석하면서 $r(x)$의 식을 추론할 수 있었어. 여러모로 접근하기 어려운 문제였으나 항등식의 이용, 주어진 함수를 이용해 내가 알고 싶은 함수를 찾아내기 등을 연습해 보기에 좋은 문제인 것 같아.

I 101 정답 15 *좌표평면 위에서 움직인 거리 ······ [정답률 35%]

정답 공식: 주어진 식을 변형해 s, t에 대한 식을 얻고, s가 곡선의 길이임을 이용해 t에 대한 식으로 정리한다.

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge1)$에서의 위치 (x, y)가

단서 1 $x=2\ln t=0$이 되는 t의 값은 1이므로 $t=1$에서 출발해.

$\begin{cases} x=2\ln t \\ y=f(t) \end{cases}$ 이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로 부터 움직인 거리가 s가 될 때, 시각 t는 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때, 점 P의 속도는 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\frac{1}{2}, a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. (4점)

단서 2 점 P의 위치벡터가 $(2\ln t, f(t))$이므로 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리 s는 $\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}dt$야.

1st 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 좌표평면 위의 점 P가 움직인 거리 s는

$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$야.

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)$이므로 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s일 때, 시각이 t이므로

$s=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}dt$ ⋯ ㉠

함정 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직이기 시작했으니까 그때의 시각은 $t=1$이야. $t=1$일 때, $x=2\ln1=0$이고 $y=f(1)$인 거야.

2nd $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$에서 s를 t에 대한 식으로 정리하여 $f'(t)$를 구하자.

$t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$에서

구하는 것이 가속도니까 $f''(t)$를 구하려면 $s=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}dt$의 양변을 미분하면 되는데 $\dfrac{ds}{dt}$를 알 수가 없잖아. 그래서 관계식 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$가 필요한 거야.

1등급 대비 특강

＊ t의 값의 개수가 103이 되기 위한 조건

$\int_a^t f(x)dx=0$에서 $\int_a^0 f(x)dx+\int_0^t f(x)dx=0$이므로

$\int_0^t f(x)dx=-\int_a^0 f(x)dx$이다.

여기서 $g(t)=\int_0^t f(x)dx$라 하면 $-\int_a^0 f(x)dx$는 상수이므로 방정식

$\int_a^t f(x)dx=0$의 실근의 개수는 함수 $y=g(t)$의 그래프와 x축에 평행한 직선

$y=-\int_a^0 f(x)dx$의 교점의 개수와 같음을 이용해도 된다.

이때, 함수 $f(x)=\sin(2^n\pi x)$의 그래프에 의해 함수 $g(t)$는 $t=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$에서 극대가 되고, $t=a_n$에서 극소가 된다.

따라서 실근의 개수가 103이 되려면 직선 $y=-\int_a^0 f(x)dx$가 함수 $y=g(t)$의 그래프와 $a_{52}\le t\le a_{53}$인 범위에서 접해야 함을 알 수 있다.

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점+4점+5점]

I 108 정답 ⑤ ＊급수와 정적분의 관계 [정답률 51%]

정답 공식: $x=1$, $y=1$을 대입해서 $f(1)$의 값을 찾고, $y=1$을 대입해서 $f(x)$의 식을 구한다. 이후 급수 표현을 정적분으로 바꿔서 정적분 값을 계산한다.

함수 f는 임의의 실수 x, y에 대하여 다음을 만족시킨다.

단서 1 이 관계식은 x, y에 어떠한 값을 대입해도 항상 성립해. 먼저 $x=1$, $y=1$을 대입하자.

$f(1)>0$, $f(xy)=f(x)f(y)-x-y$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2$의 값은? (4점)

단서 2 급수를 정적분으로 변형하여 계산하면 돼. $2+\frac{4k}{n}=x$라 놓고, 주어진 식을 변형해봐.

① 510 ② 624 ③ 756 ④ 832 ⑤ 948

1st 주어진 관계식을 이용해 $f(1)$의 값을 구해.

$f(xy)=f(x)f(y)-x-y$에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)f(1)-1-1$에서

$\{f(1)\}^2-f(1)-2=0$

$\{f(1)+1\}\{f(1)-2\}=0$ $\quad\therefore f(1)=-1$ 또는 $f(1)=2$

그런데 $f(1)>0$이므로 $f(1)=2$이다.

2nd $f(x)$를 구하자.

$f(xy)=f(x)f(y)-x-y$에 $y=1$을 대입하면

$f(x)=f(x)f(1)-x-1$

이때, $f(1)=2$이므로

$f(x)=2f(x)-x-1$ $\quad\therefore f(x)=x+1$

3rd 주어진 급수를 정적분으로 바꾸어 계산해.

$2+\frac{4k}{n}=x$라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\to\int_2^6$, $\frac{4}{n}\to dx$이므로

$2+\frac{4k}{n}=x$로 놓으면 $k=1$, $n\to\infty$일 때 $x=2$
$k=n$일 때 $x=2+4=6$이므로
정적분의 아래끝과 위끝은 각각 2, 6이 되는 거야.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2$

$=9\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2\frac{4}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{36}{n}\left\{f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2$

$=9\int_2^6\{f(x)\}^2dx=9\int_2^6(x+1)^2dx$ $\cdots$ ㉠

$\int_a^b f(x+k)dx=\int_{a+k}^{b+k}f(x)dx$이므로 $\int_2^6(x+1)^2dx=\int_3^7 x^2dx$로 놓고 풀어도 돼.

(㉠의 식)

$=9\int_2^6(x^2+2x+1)dx=9\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_2^6$

$=9\times\left\{(72+36+6)-\left(\frac{8}{3}+4+2\right)\right\}=948$

다른 풀이: $\frac{4k}{n}=x$라 하고 급수를 정적분으로 변형하기

$\frac{4k}{n}=x$라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\to\int_0^4$, $\frac{4}{n}\to dx$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2=9\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2\frac{4}{n}$

$=9\int_0^4\{f(2+x)\}^2dx=9\int_0^4(x+3)^2dx=9\int_3^7x^2dx$

$f(x)=x+1$에서 x 대신에 $2+x$를 대입해.

$=9\times\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^7=9\times\frac{1}{3}\times(7^3-3^3)=948$

I 109 정답 ⑤ ＊급수와 정적분의 관계 [정답률 51%]

정답 공식: $\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$이므로 $f(x)$가 $x=1$에 대하여 대칭임을 이용해 m의 값을 구하고, $g'(x)=f(x)$임을 이용해 a의 값을 구한다.

이차함수 $f(x)=x^2+mx-8$이

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

단서 좌변과 우변의 급수를 각각 정적분으로 나타내어서 양변을 비교해보면 함수 $f(x)$에 대한 조건을 찾을 수 있어.

를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$는 $x=a$에서 극소이다. a의 값은? (단, m은 상수이다.) (4점)

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

1st 정적분과 급수의 관계를 이용하여 함수 $f(x)$의 특징을 찾자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$에서 좌변과 우변의 급수를 각각

정적분으로 표현하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2 f(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$에서 $1+\frac{k}{n}=x$로 놓으면 $\frac{1}{n}\to dx$이고
$k=1$일 때, $n\to\infty$이면 $x=1$
$k=n$일 때, $x=1+1=2$
에서 적분구간은 $[1, 2]$가 돼.
$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2 f(x)dx$

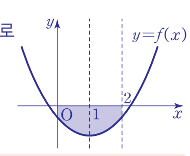
$\therefore\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$ $\cdots$ ㉠

이때, 함수 $f(x)$는 이차함수이므로 ㉠이 성립하려면 함수 $f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이어야 한다.

즉, $f(x)=x^2+mx-8$의 축이 $x=1$이므로

$m=-2$

$f(x)=x^2+mx-8$의 축의 방정식은 $x=-\frac{m}{2}$이므로
$-\frac{m}{2}=1$ $\quad\therefore m=-2$



2nd $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구해.

따라서 $f(x)=x^2-2x-8$이므로 $g(x)=\int_0^x(t^2-2t-8)dt$이고

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$이므로 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

주의 $g(x)$가 $x=a$에서 극소라는 것은 $g'(a)=0$이고 $x<a$에서 $g'(x)<0$, $x>a$에서 $g'(x)>0$이라는 거야.
이때 $g'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$를 이용하면 돼.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 $a=4$이다.

I 110 정답 ① *정적분과 급수의 관계-여러 가지 함수 ····· [정답률 52%]

정답 공식: 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{b-a}{n}\times f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right)\right\}=\int_a^b f(x)\,dx$임을 이용한다.

함수 $f(x)=x^2e^{x^2-1}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은? (3점)

단서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$가 보이지? 주어진 급수를 정적분으로 변형할 수 있어.

① e^3-1 ② $e^3-\frac{1}{e}$ ③ e^4-1
④ $e^4-\frac{1}{e}$ ⑤ e^5-1

1st 정적분과 급수 사이의 관계를 이용하여 급수를 정적분으로 변형하자.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{b-a}{n}\times f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right)\right\}$에서 $a=1, b=2$로 놓으면 $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}, x_k=a+k\Delta x=1+\frac{k}{n}$

$$=\int_1^2\frac{2}{x}f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{2}{x}\times x^2e^{x^2-1}\right)dx$$
$$=\int_1^2 2xe^{x^2-1}\,dx$$

2nd 피적분함수에서 $2x$와 e^{x^2-1}의 지수 x^2-1의 관계는 $(x^2-1)'=2x$가 성립하므로 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있어.

$x^2-1=t$라 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고
$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$
이므로

주의 치환적분법을 이용하면 적분구간도 달라짐에 유의해.

$$\int_1^2 2xe^{x^2-1}\,dx=\int_0^3 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^3$$
$$=e^3-e^0=e^3-1$$

I 111 정답 ④ *정적분과 급수의 관계-여러 가지 함수 [정답률 64%]

정답 공식: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{ak}{n}\right)\frac{a}{n}=\int_1^{1+a}f(x)dx$

함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은? (4점)

단서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$ 꼴의 급수가 보이면 정적분으로 바꾸어 계산해야 해.

① $\ln 2$ ② $(\ln 2)^2$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$
④ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

1st 급수를 정적분으로 바꾸어야 해.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2\frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$1+\frac{k}{n}=x$로 놓으면 $dx=\frac{1}{n}$이고, 적분구간은 1부터 2까지가 돼.

$$=\int_1^2\ln x\,(\ln x)'dx$$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$$=\int_0^{\ln 2}t\,dt$$

$\ln x=t$로 치환하면 $(\ln x)'dx=dt$이고, t의 범위는 $\ln 1=0$부터 $\ln 2$까지야.

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 2}=\frac{(\ln 2)^2}{2}$$

I 112 정답 23 *적분과 급수의 합의 관계 ············ [정답률 57%]

정답 공식: $g(a)$를 정적분과 급수의 관계를 이용하여 정적분으로 나타낸다.

함수 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases}\frac{[x]^2+x}{[x]} & (1\le x<3)\\ \frac{7}{2} & (x\ge 3)\end{cases}$ 이라 하자.

함수 $f(x)$와 $a\ge 3$인 실수 a에 대하여

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a)+f\left(a-\frac{2}{n}\right)+f\left(a-\frac{4}{n}\right)+\cdots+f\left(a-\frac{2(n-1)}{n}\right)}{n}$$

이라 할 때, $8\times g(3)$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) (5점)

단서 정적분과 급수의 합의 관계를 이용하여 정적분으로 바꾸어 $g(a)$를 구해.

1st 함수 $f(x)$를 간단히 나타내.

주의 정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때 $[x]=n$이므로 $1\le x<2$, $2\le x<3$으로 나누어 함수 $f(x)$를 구해줘야 해.

(i) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로 $f(x)=\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{1^2+x}{1}=x+1$

(ii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$$f(x)=\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{2^2+x}{2}=\frac{1}{2}x+2$$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (1\le x<2)\\ \frac{1}{2}x+2 & (2\le x<3)\\ \frac{7}{2} & (x\ge 3)\end{cases}$

2nd 정적분과 급수의 합의 관계를 이용하여 $g(a)$를 정적분으로 나타내.

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a)+f\left(a-\frac{2}{n}\right)+f\left(a-\frac{4}{n}\right)+\cdots+f\left(a-\frac{2(n-1)}{n}\right)}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a-\frac{2(k-1)}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=-\frac{1}{2}\int_a^{a-2}f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{a-2}^{a}f(x)dx$$

$a-\frac{2(k-1)}{n}=x$라 하면 $\left(a-\frac{2}{n}\right)-a=-\frac{2}{n}\longrightarrow dx$이고 $\lim_{n\to\infty}a=a$, $\lim_{n\to\infty}\left\{a-\frac{2(n-1)}{n}\right\}=a-2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\to\int_a^{a-2}$야.

1회 미적분 실전 기출 모의고사

문제편 p. 320

1회 01 정답 ① *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 96%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 n^2으로 나눠서 $\frac{1}{\infty}\to 0$을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분자를 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눠서 극한값을 계산해.

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

1st 분자를 전개한 후 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어서 구해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+1}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}}_{\text{분모의 최고차항이 }n^2\text{이니까 분모, 분자를 각각 }n^2\text{으로 나누자.}}=\frac{3}{2}$$

1회 02 정답 ⑤ *등비급수의 수렴과 발산 [정답률 69%]

(**정답 공식:** 일반항의 극한값이 0이 되지 않는 급수를 찾는다.)

수열 $\{a_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 수렴하지 않는 급수는? (3점)

단서 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 각각 주어져 있으니까 선택지에 주어진 등비급수의 공비를 구할 수 있어. 구해낸 공비의 범위를 가지고 수렴, 발산을 판단해.

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$　② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$　③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nb_n$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$　⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$

1st 등비급수가 수렴할 조건은 공비 r가 $-1<r<1$임을 이용해.

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이고, 등비급수에서 공비 r가 $-1<r<1$이면 수렴하므로 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 수렴한다.

① 수열 $\{2a_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$은 수렴!

첫째항이 $2a_1=2$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열

② $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$도 수렴!

[급수의 성질]

수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$($c$는 상수), $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$(복호동순)이 성립해.

③ 수열 $\{(-1)^nb_n\}$의 일반항은

$(-1)^nb_n=(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\underbrace{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{첫째항이 }-1,\text{ 공비가 }-\frac{1}{2}\text{인 등비수열}}$으로 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 수렴!

④ 수열 $\{a_nb_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이므로 수렴!

⑤ 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$의 공비는 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$이므로 발산!

다른 풀이: 선택지에 주어진 등비급수의 합 직접 계산하기

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$ (수렴)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$ (수렴)

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=-\frac{2}{3}$ (수렴)

$(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)\cdot(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=(-1)\cdot\left\{(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}$

$=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$ (수렴)

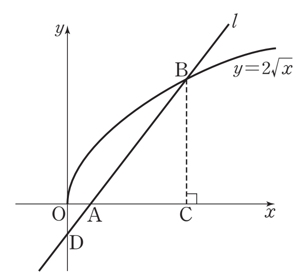
⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\infty$ (발산)

등비급수의 공비 $\frac{3}{2}>1$이므로 이 급수는 발산해.

1회 03 정답 ⑤ *함수의 몫의 미분법 [정답률 88%]

(**정답 공식:** 주어진 좌표를 이용해 $f(t)$를 구하고, 미분하여 $t=9$를 대입한다.)

점 A(1, 0)을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자. 점 B(t, $2\sqrt{t}$)에 대하여 삼각형 BAC의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f'(9)$의 값은? (3점)



단서 점 B의 좌표가 주어져 있으므로 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있어. 그럼 삼각형 BAC의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있지.

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$

④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

1st 삼각형 BAC의 넓이 $f(t)$를 구해.

A(1, 0), B(t, $2\sqrt{t}$), C(t, 0)이므로 삼각형 BAC의 넓이는

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times(t-1)\times2\sqrt{t}$

$=\sqrt{t}(t-1)=t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$

2nd $f'(t)$를 구한 후 $t=9$를 대입해.

$f'(t)=\underbrace{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}_{r\text{가 유리수일 때 }(x^r)'=rx^{r-1}}=\frac{3\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\therefore f'(9)=\frac{3\sqrt{9}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{9}{2}-\frac{1}{6}=\frac{13}{3}$

1회 04 정답 ③ *두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 …… [정답률 72%]

(**정답 공식:** 구간 $[0, \pi]$에서 $\frac{1}{n}\sin x \ge \frac{1}{n+1}\sin x$이다.)

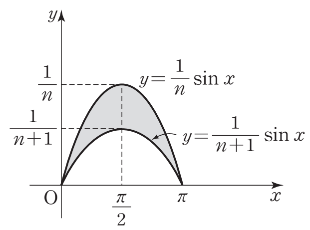
자연수 n에 대하여 구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+1}\sin x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때,

단서 두 곡선의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 후 정적분을 이용하여 넓이를 구하자.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$의 값은? (3점)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

1st 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n을 구해.



구간 $[0, \pi]$에서 $\frac{1}{n}\sin x \ge \frac{1}{n+1}\sin x$이므로

$$S_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin x-\frac{1}{n+1}\sin x\right)dx=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$야.

2nd $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$의 값을 구해.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

✿ 두 곡선 사이의 넓이 개념·공식

닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b(a<b)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

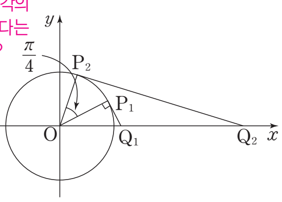
1회 05 정답 ③ *좌표평면에서 삼각함수의 덧셈정리 …… [정답률 65%]

(**정답 공식:** $\overline{P_2Q_2}$를 알기 위해 $\tan\left(\angle P_1OQ_1+\frac{\pi}{4}\right)$를 구한다.)

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_1이라 할 때, 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다. 점 P_1을 원점 O를 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_2라 하자. 삼각형 P_2OQ_2의 넓이는? (단, 점 P_1은 제1사분면 위의 점이다.) (3점)

단서 2 직각삼각형의 넓이는 삼각함수를 이용하면 쉽지?

단서 1 회전시켰으므로 각의 크기가 더해진다는 것을 알 수 있지?



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

1st 점 P_1의 좌표를 구해.

$\overline{OP_1}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면
점 P_1은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $P_1(\cos\theta, \sin\theta)$
따라서 점 P_1에서의 접선의 방정식은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이다.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$

$$\therefore Q_1\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$$

$$\triangle P_1OQ_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{1}{4}$$

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)

$$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$$

2nd 점 P_2의 좌표를 구해.

$\overline{OP_2}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta+\frac{\pi}{4}$이므로

$$P_2\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

따라서 점 P_2에서의 접선의 방정식은 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)x+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)y=1$

이므로 $Q_2\left(\frac{1}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}, 0\right)$

$\triangle P_1OQ_1$에서 구한 것과 마찬가지로 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\times\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \triangle P_2OQ_2=\frac{1}{2}\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\times1}=\frac{3}{2}$$

✿ 삼각함수의 덧셈정리 개념·공식

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
③ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$