

문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면 수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 풀다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -



수능 1등급 완성 학습 계획표 [35일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A01~59		월 일	월 일
2	60~97		월 일	월 일
3	98~121		월 일	월 일
4	B01~52		월 일	월 일
5	53~98		월 일	월 일
6	99~137		월 일	월 일
7	C01~50		월 일	월 일
8	51~99		월 일	월 일
9	100~147		월 일	월 일
10	148~177		월 일	월 일
11	D01~54		월 일	월 일
12	55~97		월 일	월 일
13	98~144		월 일	월 일
14	145~173		월 일	월 일
15	E01~56		월 일	월 일
16	57~110		월 일	월 일
17	111~160		월 일	월 일
18	161~194		월 일	월 일
19	F01~58		월 일	월 일
20	59~103		월 일	월 일
21	G01~57		월 일	월 일
22	58~111		월 일	월 일
23	112~157		월 일	월 일
24	158~198		월 일	월 일
25	199~228		월 일	월 일
26	H01~53		월 일	월 일
27	54~103		월 일	월 일
28	104~152		월 일	월 일
29	153~184		월 일	월 일
30	I01~50		월 일	월 일
31	51~92		월 일	월 일
32	93~132		월 일	월 일
33	모의 1회		월 일	월 일
34	모의 2회		월 일	월 일
35	모의 3회		월 일	월 일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) - 도끼를 갈아 비늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)



자이스토리 고3 수학 I 활용법 + α

① 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.



② 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 방법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

③ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.



④ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 (단서)로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 (발상)해서 문제 풀이에 (적용)하는 방법을 익히세요.

⑤ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.



⑥ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.



단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제

동영상 강의 QR코드



- 1 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
- 2 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
- 3 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
- 4 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!



차 례 [총 159개 유형 분류]



I 지수함수와 로그함수

A 지수 - 12개 유형 분류

핵심 개념 정리	12
기본 기출 문제	13
수능 유형별 기출 문제	14
1등급 마스터 문제	30
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	31
동아리 소개/서울대 TNT	32

B 로그 - 15개 유형 분류

핵심 개념 정리	34
기본 기출 문제	35
수능 유형별 기출 문제	36
1등급 마스터 문제	56
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	57
동아리 소개/고려대 관현악단	58

C 지수함수와 로그함수 - 22개 유형 분류

핵심 개념 정리	60
기본 기출 문제	61
수능 유형별 기출 문제	62
1등급 마스터 문제	93
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	97

D 지수함수와 로그함수의 활용 - 19개 유형 분류

핵심 개념 정리	100
기본 기출 문제	101
수능 유형별 기출 문제	102
1등급 마스터 문제	128
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	130

II 삼각함수

E 삼각함수 - 29개 유형 분류

핵심 개념 정리	132
기본 기출 문제	133
수능 유형별 기출 문제	134
1등급 마스터 문제	163
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	165

F 삼각함수의 활용 - 13개 유형 분류

핵심 개념 정리	168
기본 기출 문제	169
수능 유형별 기출 문제	170
1등급 마스터 문제	189
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	192



III 수열

G 등차수열과 등비수열 - 24개 유형 분류

핵심 개념 정리	196
기본 기출 문제	197
수능 유형별 기출 문제	198
1등급 마스터 문제	230
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	232

H 수열의 합 - 15개 유형 분류

핵심 개념 정리	234
기본 기출 문제	235
수능 유형별 기출 문제	236
1등급 마스터 문제	264
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	267

I 수학적 귀납법 - 10개 유형 분류

핵심 개념 정리	270
기본 기출 문제	271
수능 유형별 기출 문제	272
1등급 마스터 문제	301
경찰대, 삼사 중요 기출 문제	307



수학 I 실전 기출 모의고사

1회 모의고사 [2027학년도 수능 대비①]	312
2회 모의고사 [2027학년도 수능 대비②]	314
3회 모의고사 [2027학년도 수능 대비③]	316

빠른 정답 찾기 319

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

셀프수학





개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리 - 쉽게 이해되는 개념과 공식

가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ★★★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- **기출 비중**, **한걸음 더**, **왜 그럴까?** : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- **출제** : 2028학년도 수능 예시 문항과 2026학년도 수능, 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시

A 지수

1 거듭제곱과 거듭제곱근 - 유형 01

(1) 거듭제곱: 임의의 실수 a 와 자연수 n 에 대하여 $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n\text{개}}$ 와 같이 a 를 n 번 곱한 것을 a 의 n 제곱이라 한다. 또, a 의 제곱, 세제곱, 네제곱, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱**이라 하고, a^n 에서 a 를 거듭제곱의 밑, n 을 거듭제곱의 지수라 한다.

(2) 거듭제곱근: 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 즉 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다. 이때, a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱근**

(3) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

기출 강의 동영상 강의 개념+중요 문제 QR 코드

기출 비중

n 이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$
n 이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(\sqrt[n]{a})^n = a $

왜 그럴까?

① n 이 짝수일 때, $y = a$ ($a > 0$)

2 기본 기출 문제 - 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

A01 ★★★★★ 2016학년도 4월/교육청 9(고3)

16의 네제곱근 중 실수인 것을 a , -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, $a-b$ 의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3

A05 ★★★★★ 201

$2 \leq n \leq 100$ 인 자연수 n 에 대하여 $(\sqrt[n]{3})^{\frac{1}{n}}$ 이 $\frac{1}{n}$ 보다 작아지도록 하는 n 의 개수를 구하시오. (4점)

3 경찰대·삼사 기출 문제 - 최신 중요 기출 문제 수록

경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]

A116 ★★★★★ 2022학년도 경찰대 13(고3)

실수 $r = \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1}$ 에 대하여 $r^2 + r^3 + r^4 = a\sqrt{4} + b\sqrt{2} + c$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 유리수이다.) (4점)

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

A119 ★★★★★ 2020학년도

실수 x 에 대하여 $2^{2x} = 9$ 일 때, 3^x 의 값은? (3점)

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

4 유형별 기출 문제 - 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- **tip** : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.

(2) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

A11 ★★★★★ 2021학년도(가) 6월

자연수 n 이 $2 \leq n \leq 11$ 일 때, $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합은? (4점)

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

- **유형 분류** : **출제** - 2028 수능 예시 문항과 2026 수능, 평가원에서 출제된 유형
- **고난도** - 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- **난이도** : ★★★★★ - 기본 문제 ★★★★★ - 중급 문제
★★★★ - 중상급 문제 ★★★★★ - 상급 문제
- **Pass** : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- **출처표시** : 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
- **2026대비 수능 1(고3)** : 2025년 11월에 실시한 수능
- **2026대비 6월 모평 2(고3)** : 2025년 6월에 실시한 평가원
- **2025실시 5월 학평 3(고3)** : 2025년 5월에 실시한 학력평가
- **2026대비 9월 모평 2(고3)** : 2025년 9월에 실시한 평가원
- **표시 없는 문제** : 기출 변형 문제

5 수학 I 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성된 3회의 실전 모의고사입니다. 수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

1 회 수학 I 실전 기출 모의고사 2026학년도 수능 대비 ①

범위: 수학 I 전단원

5자선다형

1 01 ★★★★★ 2010학년도(가) 수능 1(고3)

$27^{\frac{1}{3}} + \log_4 4$ 의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1 05 ★★★★★ 2014학년도(가) 12월 예비 8월

곡선 $y = -2^x$ 을 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시킨 곡선을 $y = f(x)$ 라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 A 라 하자. (단, $m > 2$ 이다.) 곡선 $y = 2^x$ 이 곡선 $y = f(x)$ 와



6 1등급 마스터 문제 - 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

*** - 상급 문제

2등급 대비 - 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제

1등급 대비 - 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A114 *** 2017실사(나) 3월 학평 2(고3)

자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \{(a, b) \mid 2^m \mid a-b, a, b \text{는 자연수}\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
 ㄴ. 자연수 k 에 대하여 $m=2^k$ 이면 $n(A_m)=k$ 이다.
 ㄷ. $n(A_m)=1$ 이 되도록 하는 두 자리의 자연수 m 의 개수는 23이다.

[1등급 대비+2등급 대비]

A115 2등급 대비 2019실사(가) 6월 학평 2(고3)

자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 다음과 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt[3]{9 \times 2^{n-1}} & (n \text{이 홀수}) \\ \sqrt[3]{4 \times 3^n} & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q 에 대하여 $f(p) \times f(q)$ 가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40
 ④ 42 ⑤ 44

7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

A 115 정답 ⑤ 1등급 대비 [정답률 22%]

★ 자연수가 되도록 하는 자연수의 순서쌍의 개수 구하기 [유형 01-02-07]

단서+발상

①115 자연수 1, 2, 3, ..., n 에 대하여 $f(n)$ 이 n 이 홀수이면 홀수, n 이 짝수이면 짝수인 정수인 $f(n)$ 을 만듦에 따라 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=4, \dots$ 이므로 규칙을 찾을 수 있고 이 가운데서 문제를 푸는 순서를 잡을 수 있다. (해설)

②115 a, q 가 홀수 짝수인 경우를 각각 나누어 $f(p) \times f(q)$ 의 식을 구한다. (해설)

③115 $f(n)$ 이 홀수이면 n 이 홀수이고 $f(n)$ 이 짝수이면 n 이 짝수인 경우를 따져보는 것이 중요하다. (해설)

④115 $f(n)$ 이 홀수이면 n 이 홀수이고 $f(n)$ 이 짝수이면 n 이 짝수인 경우를 따져보는 것이 중요하다. (해설)

My Top Secret

세로대 선배의 1등급 대비 전략

나는 이 문제를 풀 때 이차방정식으로 식을 세우고 근을 먼저 구하지 않고 정수인 S 의 상하의 정수인 $S-1, S+1$ 에 대해서도 $f(n)$ 의 값을 구해서 $f(n)$ 이 홀수 짝수인 경우를 따져보는 것이 중요하다. (해설)

문제 분석

어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

단서+발상

단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.

개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.

유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.

발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.

적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.

해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

1등급 대비 특강

고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

My Top Secret

1, 2등급 대비 문제를 다루는 세로대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

8 입체 침삭 해설!

정답 공식

출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이

문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식

해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수

문제를 푸는 과정에서 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이

문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강

문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식

문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

A 71 정답 124 ★ 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 - [정답률 82%]

정답 공식: $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, 소수 a , 자연수 m, n 에 대해 $a^{\frac{m}{n}}$ 이 자연수가 되기 위해서는 m 이 n 의 배수(m 이 n 의 약수)이어야 한다.

방정식 $\log_2(x+9) = \log_2 4 + \log_2(x-6)$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. (3점)

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

E 117 정답 ⑤ ★ 삼각함수의 성질 - [정답률 68%]

정답 공식: $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\frac{1}{5}$ 일 때, $\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta}$ 의 값은? (3점)

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5



집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 내신 + 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록 수능, 모의평가, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로 수록하였습니다.
그리고 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서 명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

권순원 서울 PGA 오목관	배수나 서울 가인아카데미	위경아 서울 강남대성기숙의대관	조승원 수원 경기과학고등학교
김덕환 대전 대성여자고등학교	신건를 대치 다원교육	장광결 김포외국어고등학교	지강현 안양 신성고등학교
김대식 하남 하남고등학교	신명선 안양 신성고등학교	장경호 가평 청평중학교	홍지연 부산대 수학 박사과정
민경도 서울 강남 종로학원	신현준 안양 신성고등학교	장철희 서울 보성고등학교	홍지우 안양 부흥고등학교
박소희 안양외국어고등학교	이종석 일등급 수학 저자	전경준 서울 풍문고등학교	수경 수학 콘텐츠 연구소
박숙녀 아산 충남삼성고등학교	이창희 서울 THE 다원수학	전준홍 서울 압구정 YEstudy	

[다른 풀이 집필]

김연주 목동 쌤올림수학	안병훈 부산 팀매쓰수학전문학원	정광조 서울 로드맵수학
김요셉 김포 대치명인학원	유대호 평촌 플랜지이데	정태성 부산 하이스트
김호원 분당 원수학학원	이강수 반포 뉴파인 학원	
사공 원 의정부 호연지기	장영환 제주 제로링수학교실	

개념&문제 풀이
강의 선생님
유티브 채널



셀프수학

[특별 감수진]

김동준 서울 (목동)시대인재	박주현 서울 장훈고등학교	원기찬 부산 이사벨고등학교	장주영 고양 화수고등학교
김재영 울산 현대청운고등학교	박홍재 무안 무안고등학교	양해영 서울 청솔아람학원	전수현 진 서울 페르마수학 학원
김주혁 대전 한빛고등학교	백문수 전주 완산고등학교	이광희 서울 (대치)더에스학원	최백화 서울 (대치)빅서비스수학
김지혜 의왕 백운고등학교	서원호 서울 단국대부속고등학교	이용환 원주 원주여자고등학교	최선락 서울 중계수학의중심학원
박우혁 광주 종로학원/원파학원	용현중 서울 (대치)미래인재수학학원	이재일 성남 (분당)수이학원	황금일 원주 상지여자고등학교

[감수진]

강대성 전주 블루M수학학원	박강록 순천 레츠매쓰관리형학원	왕희구 안성 수만화기숙학원본원	조경모 전주 케이엠수학학원
강민영 대구 온빛수학학원	박교국 서울 (목동)백인대장	유승범 수원 (광교)생각하는수학	조성연 서울 마포채움수학학원
강범석 인천 (송도)정탑학원	박미옥 목포 풀리아학원	육현성 화정 강남수학학원	주소연 오산 알고리즘수학연구소
강신준 수원 (영통)수학의아침	박수경 서울 수학을읽다학원	윤현성 목포 채움수학학원	주태빈 군포 (산본)수학을권하다학원
강진우 광주 페르마수학학원	박수준 서울 수준영재수학학원	이동환 인천 (송도)매쓰업수학학원	채승희 전주 채움수학전문학원
권혁재 성남 (분당)수학의아침	박재민 서울 (중계)미래탐구학원	이상민 서울 (목동)뉴스카이학원	최병현 양산 프라임수학전문학원
김건우 성남 4파센트의논리수학학원	박종범 용인 (상현)돌격수학학원	이상형 수원 수학의이상형	최 윤 전주 엠투스수학학원
김경문 양산 참진학원	박태건 구미 강남수학	이석찬 광주 스마트해법수학교육학원	최희민 인천 알리수학
김경태 부산 백파센트수학학원	박현주 수원 호매실고등학교	이성구 아산 한울고등학교	최희승 수원 (영통)엠코드수학교육학원
김관중 시흥 매쓰헌터수학학원	배남주 부천 매쓰153학원	이승준 고양 (일산)공부예진심/대치예성학원	하태욱 서울 (목동)미래탐구의대자센터
김광민 세종 청람수학전문학원	배탐스 안양 삼성학원	이윤희 인천 송덕여자중학교	함정용 서울 (반포)샤크에듀
김기영 서울 대치에스(광화문)	백규현 인천 (송도)현수수학	이진선 부여 정석학원	현 명 용인 카이스트학원
김동욱 서울 디파인수학전문학원	백지현 서울 (대치)소자수학학원	이창석 서울 핵수학전문학원	홍성진 서울 문해와수리학원
김병래 서울 천왕스카이학원	성정화 서울 LNS 수학학원	이철호 군포 파스칼수학학원	황화연 전주 근영여자고등학교
김석훈 순천 쿤수학학원	성지희 파주 SNT수학학원	임명진 안양 서연고학원	
김성혁 익산 S수학전문학원	송민호 성남 (분당)베리타스수학학원	임봉수 서울 (양천)해라수학학원	
김승현 화성 대치매쓰포유	송연재 서울 (반포)뉴파인수학학원	임지민 시흥 피타고라스수학학원	
김운엽 부산 STRT학원	송우성 서울 (송파)서강학원	장한나 부천 불날의수학교습소	
김은지 서울 명인sky수학학원(마포)	송유현 제주 GTSMath	장호근 인천 유레카수학학원(만수점)	
김이슬 화성 매쓰고등학교	송인영 파주 매쓰코어학원	전병규 양산 매쓰플랜수학학원(물금)	
김진희 울산 김진수학학원	신은숙 서울 (마곡)펜타곤학원	전성균 성남 (판교)에스메틱스학원	
김충현 통영 메카수학전문학원	신창훈 광주 송원고등학교	전호동 대전 호동쌤수학학원	
김현민 서울 구주이베수학학원(잠실본원)	여원구 제주 피드백수학전문학원	정연실 오산 미래엔정수학	
김홍중 성남 (분당)너를위한특별한수학학원	염승훈 서울 명성학원	정영진 수원 공부의자신감학원	
류세현 계룡 세현수학	오성민 광주 프리마수학학원	정지수 광주 티오티수학학원	
민동록 거제 민쌤수학과외	오성일 대구 연세EMS학원	정창규 부산 일퍼센트수학학원	

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
문지원 서울대 의예과
석민준 서울대 첨단융합학과
장현준 서강대 수학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
조선하 서울대 자유전공학부
황대운 서울대 수리과학부

수능 선배들의 **비법** 전수 - 수험장 생생 체험 소개



긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

• 2025년

강다은 대구 계성고 졸 (서울대 의예과)
김연우 대구 정화여고 졸 (연세대 의예과)
김효원 제주 제일고 졸 (서울대 의예과)
박정빈 대구 남산고 졸 (서울대 아동가족학과)
배지오 성남 낙생고 졸 (연세대 약학과)
백승준 광주송일고 졸 (카이스트 새내기과정학부)
서정후 광주 송덕고 졸 (아주대 의학과)
성예현 대전전민고 졸 (건국대 의학과)
안한민 익산 남성고 졸
오현준 서울 한영고 졸 (경상대 약학과)
이정근 안양 평촌고 졸 (동국대 wise 의예과)
이지원 대구 성화여고 졸 (고려대 생명과학부)
임지호 부산 동아고 졸 (울산대 의예과)
장윤서 부산 사직여고 졸 (중앙대 간호학과)
정규원 부산 남성여고 졸
최승우 광주서석고 졸 (서울대 약학계열)
최아람 서울 광영고 졸 (서울대 국어교육과)
한규진 대구 계성고 졸 (연세대 치의예과)

• 2024년

곽지훈 서울 한영외고 졸 (서울대 자유전공학부)
권민재 서울 광영여고 졸 (강릉원주대 치의예과)
김동현 안성 안법고 졸 (연세대 실내건축학과)
김서현 대전한빛고 졸 (카이스트 새내기과정학부)
김신유 익산 남성고 졸 (순천향대 의예과)
김아린 대전한빛고 졸 (충남대 의예과)
김용희 화성 화성고 졸 (단국대 의예과)
김지희 광주 국제고 졸 (고려대 한국사학과)
김태현 부산 대연고 졸 (서울대 수리과학부)
류이레 광주대동고 졸 (연세대 의예과)
문지민 대구 정화여고 졸 (고려대 중어중문학과)
변준서 화성 화성고 졸 (건국대 수의예과)
심기현 대구 계성고 졸 (경북대 의예과)
오서윤 서울 광문고 졸 (충남대 의예과)
전성연 부산국제고 졸 (서울대 사회학과)
조수근 성남 태원고 졸 (순천향대 의예과)

2026 응시



강기현
천안 천안고 졸업
- 독해 실전, 어법·어휘 실전



김서영
서울 잠실여고 졸업
- 생명과학 I



김서호
안양 신성고 졸업
- 고3 미적분



김연준
안성 안법고 졸업
- 독해 실전, 어법·어휘 실전



김윤
익산 이리남성여고 졸업
- 독해 실전, 어법·어휘 실전



김준성
부산 대연고 졸업
- 화학 II



김준영
서울 강서고 졸업
- 고3 확률과 통계



김준희
부산 동천고 졸업
- 세계지리



박수현
대구 대진고 졸업
- 수능 한국사



박에서
화성 안화고 졸업
- 고3 수학 I, 고3 수학 II



박준서
부산 대동고 졸업
- 지구과학 I



방진환
부산 해운대고 졸업
- 고3 기하



우다솔
서울 중앙고 졸업
- 물리학 I



원강희
대전동산고 졸업
- 화법과 작문 실전



이영서
대구 대진고 졸업
- 생명과학 II



이지민
광주대동고 졸업
- 동아시야사



이현수
부산 대동고 졸업
- 화학 I



임준호
광주 문성고 졸업
- 지구과학 II



임지안
광주 금호중앙여고 졸업
- 문학 실전



전상훈
서울 대원고 졸업
- 독서 실전



전시원
대전 한밭고 졸업
- 언어와 매체 실전



정윤서
부산 사직여고 졸업
- 생활과 윤리



정희주
익산 이리남성여고 졸업
- 윤리와 사상



최경준
광주서석고 졸업
- 한국지리



한기주
화성 삼괴고 졸업
- 고3 수학 I, 고3 수학 II



홍서연
남양주 도농고 졸업
- 사회·문화

문항 배열 및 구성 [1482제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제 (67제)

핵심 개념 정리와 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록 (1349제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2021~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.
- 수능 출제 유형 및 최신 출제 경향을 파악할 수 있도록 2028학년도 예시 문항을 추가 수록하였습니다.

❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록 (76제)

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제 (57제)

수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 수학 I 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4·5월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2026	11	11	11	11	11	11	11	77	*2027학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2025	11	11	11	11	11	11	11	77	
2024	11	11	11	11	11	11	11	77	
2023	11	11	11	11	11	11	11	77	
2022	11	11	11	11	11	11	11	77	
2021	25	26	19	16	16	16	15	133	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2020	14	11	7	7	6	6	6	57	
2019	15	10	5	8	7	6	7	58	
2018	16	10	4	8	7	3	2	50	
2017	8	7	5	6	7	7	5	45	
2016	17	17	10	7	5	6	6	68	
2015	3	6	11	6	7	5	8	46	
2014	7	6	10	4	8	3	7	45	
2013	5	5	8	1	3	0	5	27	
2012	4	4	7	2	5	2	5	29	
2011이전	22	18	54	19	42	15	69	239	
2028, 2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								36	
수능 기출 변형 문제								57	
고1/고2 학력평가								131	
삼사 및 경찰대								76	
총 문항 수								1482	

2026학년도 6월, 9월 평가원+수능

수학 I + 수학 II 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수목 교재	수목 번호	수목 교재	수목 번호	수목 교재	수목 번호
1	수 I	A27	수 I	A25	수 I	A23
2	수 II	C80	수 II	C81	수 II	C79
3	수 I	H17	수 I	H15	수 I	H33
4	수 II	B09	수 II	A09	수 II	B08
5	수 II	F66	수 II	C36	수 II	C35
6	수 I	E82	수 I	E128	수 I	B67
7	수 II	C48	수 II	D15	수 II	G40
8	수 I	E129	수 I	B54	수 I	E114
9	수 II	F108	수 II	F57	수 II	D134
10	수 I	D89	수 I	H13	수 I	C149
11	수 II	E90	수 II	G110	수 II	G109
12	수 I	I40	수 I	D36	수 I	G112
13	수 II	G30	수 II	A136	수 II	D57
14	수 I	F56	수 I	E86	수 I	F54
15	수 II	E142	수 II	F229	수 II	F205
16	수 I	D67	수 I	I07	수 I	I19
17	수 II	F15	수 II	F16	수 II	F14
18	수 I	H34	수 I	G27	수 I	F67
19	수 II	D112	수 II	D114	수 II	E57
20	수 I	G75	수 I	F52	수 I	H129
21	수 II	A204	수 II	E141	수 II	B131
22	수 I	D165	수 I	C164	수 I	C171

- 수 I : 2027 수능 대비 자이스토리 고3 수학 I
- 수 II : 2027 수능 대비 자이스토리 고3 수학 II



지수

★ 유형 차례

- 유형 01 거듭제곱근의 정의
- ★ 중요 유형 02 거듭제곱근의 계산
- ★ 중요 유형 03 거듭제곱근의 활용
- 유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산
- 유형 05 지수법칙 - 밑이 다른 계산(곱셈)
- 유형 06 지수법칙 - 밑이 다른 계산(덧셈)
- 유형 07 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건
- 유형 08 지수법칙의 활용 - 문자로 표현
- 유형 09 지수법칙의 활용 - 식 변형
- 유형 10 지수법칙의 활용 - 특수한 꼴
- 유형 11 지수법칙의 활용
- 유형 12 지수법칙의 실생활 응용



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2028	예시	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
	수능	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
2026	9월	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
	6월	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
	수능	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
	9월	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
2025	6월	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
	수능	유형 05 지수법칙 - 밑이 다른 계산 (곱셈)	※※※
2024	9월	유형 04 지수법칙 - 밑이 같은 계산	※※※
	6월	유형 05 지수법칙 - 밑이 다른 계산 (곱셈)	※※※

★ 2026 수능 출제 경향 분석

- 지수법칙 - 밑이 같은 계산 : 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 계산하는 기본 개념과 계산력을 판단하는 문제가 출제되었다. [A23 문항]

★ 2027 수능 예측

1. 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제가 출제 예상된다.
기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다.
2. 지수법칙을 이용하는 간단한 계산 문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 항상 출제된다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
3. 지수를 포함한 등식의 활용 문제가 출제 예상되므로 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습을 해야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.



A 지수

개념 강의



중요도 ★★☆☆

1 거듭제곱과 거듭제곱근^① — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 a 와 자연수 n 에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

와 같이 a 를 n 번 곱한 것을 a 의 n 제곱이라 한다.

또, a 의 제곱, 세제곱, 네제곱, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱**이라 하고,

a^n 에서 a 를 거듭제곱의 **밑**, n 을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

2^3 ← 지수
↑
밑

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수,

즉 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 x 를 a 의 **n 제곱근**이라 한다.

이때, a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.^②

① **n 이 짝수일 때**

$a > 0$ 이면 양수 $\sqrt[n]{a}$ 와 음수 $-\sqrt[n]{a}$ 의 2개가 있고, 그 절댓값은 같다.

$a = 0$ 이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.

$a < 0$ 이면 없다.

② **n 이 홀수일 때**

a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

$n \setminus a$	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2 거듭제곱근의 성질^③ — 유형 02~03

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{p}}}$ (단, p 는 자연수)

3 지수의 확장^④ — 유형 04~12

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{단, } a \neq 0, n \text{은 자연수})$$

(2) **지수가 유리수인 경우**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{단, } a > 0, m, n \text{은 정수, } n > 0)$$

(3) **지수법칙^⑤**

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

① $a^x a^y = a^{x+y}$ 예 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ 예 $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ 예 $(5^2)^4 = 5^{2 \times 4} = 5^8$

④ $(ab)^x = a^x b^x$ 예 $(7 \times 11)^2 = 7^2 \times 11^2$

출제

2028 예시 1번
2026 수능 1번
2026 9월 모평 1번
2026 6월 모평 1번

★ 주어진 식에서 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 값을 구하는 아주 쉬운 문제가 2028예시 문항과 수능, 9월, 6월에 모두 1번 문제로 출제되었다.

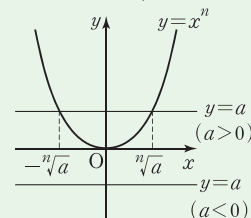
① $(\sqrt[n]{a})^n$ 과 $\sqrt[n]{a^n}$ 의 차이

n 이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
n 이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a $

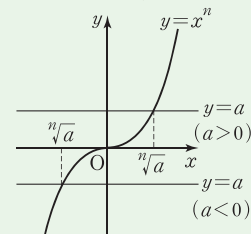
+ 개념 보충

왜 그럴까?

② ① n 이 짝수일 때,



② n 이 홀수일 때,



한걸음 더!

③ $a > 0$ 이고 n 이 2 이상의 자연수일 때,
 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

+ 개념 보충

④ $a^{\frac{m}{n}}$ 과 같이 지수가 유리수인 경우,
 a 가 소수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$ 이 자연수가 되기 위한 조건은 m 이 n 의 배수 또는 n 이 m 의 약수일 때이다.

한걸음 더!

⑤ 밑이 같을 때와 다를 때를 구분하자. 간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다. 지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.



1 거듭제곱과 거듭제곱근

A01 기출 2016실시(나) 4월 학평 9(고3)16의 네제곱근 중 실수인 것을 a , -27 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, $a-b$ 의 최댓값은? (3점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2 거듭제곱근의 성질

A02 기출 2003대비(인) 수능 1(고3) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$ 을 간단히 하면? (2점)

- ① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2^3\sqrt{2}$

A03 기출 2013대비(나) 9월 모평 6(고3) $(\sqrt[3]{2^3 \cdot 4})^3$ 보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

3 지수의 확장

A04 기출 2018실시(나) 10월 학평 1(고3) $2^{\frac{5}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? (2점)

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

A05 기출 2013대비(나) 수능 26(고3) $2 \leq n \leq 100$ 인 자연수 n 에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$ 이 어떤 자연수의 n 제곱근이 되도록 하는 n 의 개수를 구하시오. (4점)A06 기출 2006대비(나) 6월 모평 4(고3) $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$ 일 때, $\sqrt[6]{6}$ 을 a , b 로 나타낸 것은? (3점)

- ① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

A07 기출 2009대비(나) 9월 모평 20(고3)두 실수 a , b 가 $3^{a+b} = 4$, $2^{a-b} = 5$ 를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$ 의 값을 구하시오. (3점)A08 기출 2005대비(나) 12월 예비 26(고3)어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0 일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d 는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$$I_d = I_0 2^{-0.25d}$$

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점)

- ① 16 m ② 12 m ③ 10 m
④ 8 m ⑤ 4 m



1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

- (1) 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.
(2) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

tip

a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는

- ① n 이 짝수일 때에는 a 의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.
② n 이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

A09 * * * 2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 a, b 에 대하여 a 는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$ 는 b 의 네제곱근일때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ 의 값은? (3점)

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

A10 * * * 2022실시 7월 학평 19(고3)

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $2n^2 - 9n$ 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$ 의 값을 구하시오. (3점)



A11 * * * 2021대비(가) 6월 모평 12(고3)

자연수 n 이 $2 \leq n \leq 11$ 일 때, $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합은? (3점)

- ① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

A12 * * * 2020실시(가) 3월 학평 18(고3)

다음은 $1 \leq |m| < n \leq 10$ 을 만족시키는 두 정수 m, n 에 대하여 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하는 과정이다.

(i) $m > 0$ 인 경우

n 의 값에 관계없이 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m > 0$ 인 순서쌍 (m, n) 의 개수는 (가)이다.

(ii) $m < 0$ 인 경우

n 이 홀수이면 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n 이 짝수이면 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m < 0$ 인 순서쌍 (m, n) 의 개수는 (나)이다.

(i), (ii)에 의하여 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

(가) + (나)이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, $p + q$ 의 값은? (4점)

- ① 70 ② 65 ③ 60
④ 55 ⑤ 50

A13 *** 2024실시 5월 학평 19(고3)



집합 $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 5, x \text{는 정수}\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 X 에 대하여 두 집합 A, B 를

$$A = \{a \mid a \text{는 } x \text{의 실수인 네제곱근}, x \in X\},$$

$$B = \{b \mid b \text{는 } x \text{의 실수인 세제곱근}, x \in X\}$$

라 하자. $n(A) = 9, n(B) = 7$ 이 되도록 하는 집합 X 의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. (3점)

2 거듭제곱근의 성질

유형 02 거듭제곱근의 계산

두 양수 a, b 에 대하여 m, n 이 2 이상의 자연수일 때,

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \textcircled{2} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \textcircled{4} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (단, } p \text{는 자연수)}$$

tip

거듭제곱근의 성질은 양수에서만 적용된다.

A14 *** 2018실시(나) 3월 학평 2(고3)



$\sqrt{4} \times \sqrt[3]{8}$ 의 값은? (2점)

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

A15 *** 2009대비(나) 6월 모평 1(고3)

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4$ 의 값은? (2점)

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

A16 *** 2001대비(인) 수능 1(고3)



$(\sqrt{2})^5$ 의 값은? (2점)

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

유형 03 거듭제곱근의 활용

(1) 거듭제곱근의 성질

두 양수 a, b 에 대하여 m, n 이 2 이상의 자연수일 때,

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \textcircled{2} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \textcircled{4} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (단, } p \text{는 자연수)}$$

(2) 거듭제곱근의 대소 관계

자연수 n 에 대하여 $a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \text{이면 } a < b \text{이다.}$$

tip

- ① 실수 a 에 대하여 $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} |a| & (n \text{이 짝수}) \\ a & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$ 를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

- ② 거듭제곱근의 대소 비교는 $\sqrt[n]{}$ 에서 n 의 값을 통일시킨다.

A17 *** 2023실시 7월 학평 9(고3)



2 이상의 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$$

의 모든 실근의 곱이 -4 일 때, n 의 값은? (4점)

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A18 *** 2020실시(나) 4월 학평 18(고3)

1이 아닌 세 양수 a, b, c 와 1이 아닌 두 자연수 m, n 이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는? (4점)

(가) $\sqrt[3]{a}$ 는 b 의 m 제곱근이다.

(나) $\sqrt{b}$ 는 c 의 n 제곱근이다.

(다) c 는 a^{12} 의 네제곱근이다.

- ① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]



A114 *** 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)



자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \left\{ (a, b) \mid 2^a = \frac{m}{b}, a, b \text{는 자연수} \right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

- ㄱ. $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
- ㄴ. 자연수 k 에 대하여 $m = 2^k$ 이면 $n(A_m) = k$ 이다.
- ㄷ. $n(A_m) = 1$ 이 되도록 하는 두 자리 자연수 m 의 개수는 23이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[1등급 대비 + 2등급 대비]

A115 2등급 대비 2019실시(가) 6월 학평 21(고2)



자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 다음과 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (n \text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^n} & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q 에 대하여 $f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는? (4점)

- ① 36 ② 38 ③ 40
- ④ 42 ⑤ 44



A116 * * * 2025대비 삼사 12(고3)



2 이상의 자연수 n 에 대하여 $-(n-k)^2+8$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은? (4점)

- ① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

A117 * * * 2022대비 경찰대 13(고3)



실수 $r = \frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$ 에 대하여

$$r+r^2+r^3=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$$

일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 유리수이다.) (4점)

- ① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

A118 * * * 2022대비 삼사 6(고3)



$\sqrt[m]{64} \times \sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는? (3점)

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

A119 * * * 2020대비 경찰대 1(고3)

실수 x 에 대하여 $2^{3x}=9$ 일 때, $3^{\frac{2}{x}}$ 의 값은? (3점)

- ① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

A120 * * * 2019대비(나) 삼사 22(고3)

$\sqrt[3]{3^{\frac{4}{p}}27}=3^{\frac{q}{p}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (3점)

A121 ☆2등급 대비 2018대비(나) 삼사 28(고3)



2 이상의 자연수 n 에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가

되도록 하는 자연수 k 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어

$f(6)=3$ 이다. $f(n)=8$ 을 만족시키는 n 의 최솟값을 구하시오.

(4점)



5지선다형

1 회 01 ※※※ 2010대비(나) 수능 1(고3)

$27^{\frac{1}{3}} + \log_2 4$ 의 값은? (2점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1 회 02 ※※※ 2016실시(가) 3월 학평 5(고3)

함수 $f(x) = a \sin x + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M - m = 6$ 일 때, 양수 a 의 값은? (3점)

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

1 회 03 ※※※ 2016실시(가) 7월 학평 6(고3)

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값은? (3점)

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

1 회 04 ※※※ 2017실시(나) 4월 학평 13(고3)

모든 실수 x 에 대하여 $\log_a (x^2 + 2ax + 5a)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 a 의 값의 합은? (3점)

- ① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

1 회 05 ※※※ 2014대비(B) 12월 예비 8(고3)



곡선 $y = -2^x$ 을 y 축의 방향으로

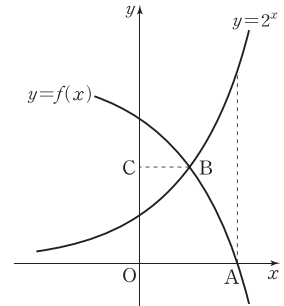
m 만큼 평행이동시킨 곡선을

$y = f(x)$ 라 하고,

곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 A라 하자. (단, $m > 2$ 이다.)

곡선 $y = 2^x$ 이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 B, 점 B에서 y 축에 내린 수선의 발을 C라 하자.

$\overline{OA} = 2\overline{BC}$ 일 때, m 의 값은? (4점)



- ① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

1 회 06 ※※※ 2014대비(A) 수능 16(고3)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고

$$(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$n \log a_{n+1} = (n+1) \log a_n + 1$$

이다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1} = \frac{\log a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{(가)}$$

이다. $b_n = \frac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1 = 1$ 이고

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{(가)}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{(나)}$$

이므로

$$\log a_n = n \times \frac{1}{n} \quad \text{(나)}$$

이다. 그러므로 $a_n = 10^{n \times \frac{1}{n}} = 10$ 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$ 과 $g(n)$ 이라 할 때,

$\frac{g(10)}{f(4)}$ 의 값은? (4점)

- ① 38 ② 40 ③ 42
④ 44 ⑤ 46

1회 07 *** 2014대비(A) 6월 학평 16(고3)

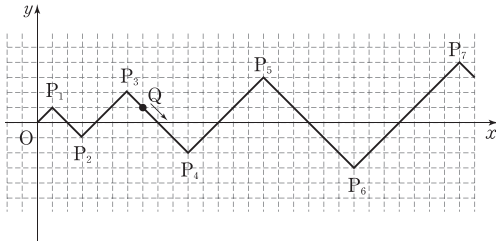


자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $x_1 = y_1 = 1$

(나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^n \times (n+1) \end{cases} (n \geq 1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}$ 을 따라 점 P_1 에 도착한다. 자연수 n 에 대하여 점 P_n 에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1} 을 향하여 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 을 따라 이동한다. 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$ 만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 (7, 1)이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y 좌표는? (4점)



- ① -5 ② -6 ③ -7
④ -8 ⑤ -9

단답형

1회 08 *** 2007실시(나) 3월 학평 18(고3)

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_7 = 12, \frac{a_6 a_{10}}{a_5} = 36$$

이 성립할 때, a_{15} 의 값을 구하시오. (3점)

1회 09 *** 2015대비(A) 6월 학평 24(고3)

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 두 함수

$$f(x) = 2^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

의 최댓값을 각각 a, b 라 하자. ab 의 값을 구하시오. (3점)

1회 10 *** 2014대비(A) 6월 학평 28(고3)

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$ 이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4$ ($n = 1, 2, 3, 4$)

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$ 일 때, a_2 의 값을 구하시오. (4점)

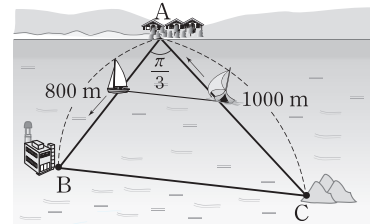
1회 11 ***



그림과 같이 갑이 탄 배는 항구 A에서 출발하여 800 m 떨어진 등대 B를 향해 속력 100 m/분으로 직선 경로를 따라서 항해하고, 을이 탄 배는 섬 C에서 출발하여 1000 m 떨어진 항구 A를 향해 속력 200 m/분으로 직선 경로를 따라서 항해하고 있다.

$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 항구 A와 섬 C를 각각 동시에 출발한 갑, 을이 탄 두 배가 같은 시간에 지나는 지점을 잇는 선분이 B지점과 C지점을 잇는 선분과 평행이 되는 순간의 두 배 사이의 거리는

$\frac{q}{p}\sqrt{21}$ 이다. $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이고, 두 배의 크기는 무시한다.) (4점)





기본 기출 문제

C 01 정답 ① *지수함수의 그래프 [정답률 95%]

(정답 공식: 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $f(a)=b$ 가 성립한다.)

실수 a, b 에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=a \times 2^x$ 의 그래프가 두 점 $(0, 4), (b, 16)$ 을 지날 때, $a+b$ 의 값은? (3점)

단서 두 점의 좌표를 각각 주어진 함수의 식에 대입해 보.

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

1st 점 $(0, 4)$ 의 좌표를 주어진 함수식에 대입하여 a 의 값을 구해.

$y=a \times 2^x$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$x=0, y=4$ 를 $y=a \times 2^x$ 에 대입하면

$$4 = a \times 2^0 = a \times 1 = a$$

$a \neq 0$ 일 때, $a^0=1$

$$\therefore a=4$$

2nd 점 $(b, 16)$ 의 좌표를 주어진 함수식에 대입하여 b 의 값을 구해.

$a=4$ 이므로 주어진 함수의 식은 $y=4 \times 2^x$, 즉 $y=2^{x+2}$ 이다.

함수 $y=2^{x+2}$ 의 그래프가 점 $(b, 16)$ 을 지나므로 $4 \times 2^b = 2^2 \times 2^b = 2^{b+2}$

$x=b, y=16$ 을 $y=2^{x+2}$ 에 대입하면

$$16 = 2^{b+2}, 2^4 = 2^{b+2}$$

$$4 = b+2$$

$$\therefore b=2$$

따라서 $a=4, b=2$ 이므로

$$a+b=4+2=6$$

C 02 정답 ② *지수함수의 그래프의 평행이동 [정답률 94%]

(정답 공식: 함수 $y=5^{2x}$ 의 그래프를 주어진 조건에 맞게 평행이동시킨 그래프의 식을 구한다.)

함수 $y=5^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=25 \cdot 5^{2x} + 2$ 의 그래프가 되었다.

$m+n$ 의 값은? (3점) 단서 $y=5^{2x}$ 의 x 대신에 $x-m$, y 대신에 $y-n$ 을 대입하면 $y=25 \cdot 5^{2x} + 2$ 가 된다는 뜻이야.

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

1st x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$ 을 대입해.

함수 $y=5^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시켰으므로 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$ 을 대입하자.

$$y-n=5^{2(x-m)} \Rightarrow y=5^{2x-2m}+n \Rightarrow 5^{-2m} \times 5^{2x}+n$$

그런데 함수 $y=5^{2x}$ 의 그래프를 평행이동시켰더니 함수 $y=25 \times 5^{2x} + 2$ 의 그래프가 되었으므로

$$5^{-2m} \times 5^{2x} + n = 25 \times 5^{2x} + 2 \Rightarrow 5^{-2m} = 25$$

$$n=2$$

여기서 $5^{-2m}=5^2$ 이므로

$$-2m=2 \Rightarrow m=-1 \rightarrow \text{양수 } a \text{에 대하여 } a^{f(x)}=a^{g(x)} \text{이면 } a=1 \text{ 또는 } f(x)=g(x)$$

$$\therefore m+n=-1+2=1$$

C 03 정답 ① *지수함수의 최대·최소-지수가 일차식 ... [정답률 93%]

(정답 공식: 지수함수 $y=a^x$ 은 $a>1$ 이면 증가함수, $0<a<1$ 이면 감소함수임을 안다.)

정의역이 $\{x|-1 \leq x \leq 3\}$ 인 두 지수함수 $f(x)=4^x, g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

에 대하여 $f(x)$ 의 최댓값을 M , $g(x)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은? (3점) 단서 지수함수는 (밑) >1 이면 증가함수이고 $0<(\text{밑})<1$ 이면 감소함수야.

- ① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

1st 먼저 $f(x)=4^x$ 의 최댓값을 구해.

$f(x)=4^x$ 은 (밑) >1 이므로 증가함수이다.

따라서 $x=3$ 일 때, 최댓값 $4^3=64$ 를 가지므로 $M=64$

2nd $g(x)$ 의 최솟값을 구해 볼까?

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 $0<(\text{밑})<1$ 이므로 감소함수이다.

따라서 $x=3$ 일 때, 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ 을 가지므로 $m=\frac{1}{8}$

$$\therefore Mm=64 \times \frac{1}{8}=8$$

* 지수함수의 최댓값과 최솟값

개념·공식

정의역이 $\{x|x_1 \leq x \leq x_2\}$ 인 지수함수 $y=a^x$ 에 대하여

- ① $a>1$ 이면 최솟값은 $x=x_1$ 일 때 a^{x_1} 이고, 최댓값은 $x=x_2$ 일 때 a^{x_2} 이다.
② $0<a<1$ 이면 최솟값은 $x=x_2$ 일 때 a^{x_2} 이고, 최댓값은 $x=x_1$ 일 때 a^{x_1} 이다.

C 04 정답 ① *지수함수를 이용한 대소 관계 [정답률 82%]

(정답 공식: $A>0, B>0$ 일 때, $\frac{A}{B}>1$ 일 경우 $A>B$ 임을 이용한다. 혹은 조건을 만족시키는 임의의 숫자를 넣어서 구할 수도 있다.)

$0<a<b<c<1$ 을 만족하는 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$A=a^a b^b c^c, B=a^a b^c c^b, C=a^b b^c c^a$$

이라고 하자. 이때, A, B, C 의 대소 관계로 옳은 것은? (4점)

단서 A, B, C 가 세 양수 a, b, c 의 거듭제곱의 곱의 꼴로 주어졌으므로 두 수의 비를 이용하여 대소 관계를 구할 수 있어.

- ① $C<B<A$ ② $B<C<A$ ③ $C<A<B$
④ $A<C<B$ ⑤ $B<A<C$

1st 두 양수 A, B 가 $A>B$ 를 만족할 필요충분조건은 $\frac{A}{B}>1$ 임을 이용하자.

a, b, c 가 양수이므로 A, B, C 도 양수이다. 즉, $0<a<b<c<1$ 에서

$$\frac{A}{B} = \frac{a^a b^b c^c}{a^a b^c c^b} = \frac{b^{b-c}}{c^{b-c}}$$

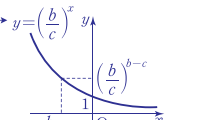
$$= \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} > 1 \left(\because 0 < \frac{b}{c} < 1, b-c < 0 \right)$$

$$\therefore A > B \dots \textcircled{1} \rightarrow m > 0, n > 0 \text{ 일 때}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{a^a b^c c^b}{a^b b^c c^a} = \frac{a^{a-b}}{c^{a-b}} \quad \textcircled{1} \frac{m}{n} > 1 \text{ 이면 } m > n$$

$$\quad \textcircled{2} \frac{m}{n} < 1 \text{ 이면 } m < n$$

$$= \left(\frac{a}{c}\right)^{a-b} > 1 \left(\because 0 < \frac{a}{c} < 1, a-b < 0 \right)$$



$$\therefore B > C \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $C < B < A$



특독 풀이: 조건 $0 < a < b < c < 1$ 을 만족시키는 밑이 같은 지수로 변형이 가능한 세 실수를 직접 대입하여 결과를 비교하기

조건 $0 < a < b < c < 1$ 을 만족하는 임의의 세 실수 a, b, c 에 대하여 A, B, C 의 대소 관계는 변하지 않으므로 적당한 세 실수 $a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$ 을

대입해 보면

$$A = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3+4+4}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{8}}$$

$$B = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3+8+2}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{13}{8}}$$

$$C = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6+8+1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{8}}$$

밑이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 지수가 클수록 작겠지?

즉, $\frac{11}{8} < \frac{13}{8} < \frac{15}{8}$ 이므로 $C < B < A$ 야.

C 05

정답 ③ *지수함수의 그래프의 교점 [정답률 84%]

정답 공식: 함수 $f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프는 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

지수함수 $f(x) = a^{x-m}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x 좌표가 1과 3일 때, $a+m$ 의 값은? (3점)

단서 함수 $f(x)$ 와 그 역함수의 그래프의 교점은 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같음을 이용해

- ① $2 - \sqrt{3}$ ② 2 ③ $1 + \sqrt{3}$
④ 3 ⑤ $2 + \sqrt{3}$

1st 역함수 문제 중 그래프가 나오면? 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임에 착안해야 해. 두 함수 $f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

즉, $f(x) = a^{x-m}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나므로 $f(x) = a^{x-m}$ 과 직선 $y=x$ 는 두 점에서 만난다.

이때, 두 교점의 x 좌표가 1, 3이므로 두 교점의 좌표는 각각 (1, 1), (3, 3)이다. 두 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이기도 해. 즉, x 좌표와 y 좌표가 같지.

$$\therefore 1 = a^{1-m} \dots \textcircled{1}, 3 = a^{3-m} \dots \textcircled{2}$$

또, a 는 지수함수의 밑이므로 $a > 0, a \neq 1 \dots \textcircled{3}$

2nd ①, ②, ③으로 a, m 의 값을 각각 정하자.

①에서 $1 = a^{1-m}$ 이므로

$$1 - m = 0$$

$$\therefore m = 1$$

이를 ②에 대입하면 $3 = a^{3-1}$ 이므로 $3 = a^2$

$$\therefore a = \sqrt{3} (\because \textcircled{3})$$

$$\therefore a + m = 1 + \sqrt{3}$$

☆ 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 의 성질

개념 · 공식

- 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
- $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- 그래프는 두 점 (0, 1), (1, a)를 지나고, 그래프의 점근선은 x 축(직선 $y=0$)이다.

C 06

정답 ⑤ *로그함수의 값 [정답률 92%]

(정답 공식: $\log_a a = 1$ 임을 이용한다.)

두 함수 $f(x) = 5^{3x}, g(x) = \frac{1}{3} \log_5 x$ 에 대하여 $f(g(5))$ 의 값은?

단서 합성함수의 함수값을 구할 때는 무엇을 어디에 대입하느냐가 중요해. (2점)
즉, $f(g(5))$ 는 $g(5)$ 의 값을 함수 $f(x)$ 의 식의 x 에 대입하라는 뜻이야.

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 먼저 $g(5)$ 의 값을 구하자.

함수 $g(x) = \frac{1}{3} \log_5 x$ 에 대하여

$$g(5) = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(g(5)) = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

2nd 이제 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값을 구하자.

함수 $f(x) = 5^{3x}$ 에 대하여

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 5^{3 \times \frac{1}{3}} = 5$$

$$\therefore f(g(5)) = 5$$



특독 풀이: 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 서로 역함수 관계임을 이용하여 $f(g(5))$ 의 값 구하기

$y = 5^{3x}$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 $x = 5^{3y}$

$$3y = \log_5 x \quad \therefore y = \frac{1}{3} \log_5 x$$

즉, 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $g(x) = f^{-1}(x)$ 이므로

$$f(g(5)) = f(f^{-1}(5)) = 5$$

역함수가 존재하는 함수 f 와 항등함수 I 에 대하여
 $f \circ f^{-1} = I, f^{-1} \circ f = I$ 가 성립해.

C 07

정답 ③ *로그함수의 그래프의 교점 [정답률 94%]

(정답 공식: 그래프를 평행이동 시킬 시 점근선도 같이 이동한다.)

곡선 $y = 2^x + 5$ 의 점근선과 곡선 $y = \log_3 x + 3$ 의 교점의 x 좌표는? (3점) **단서** 곡선 $y = 2^x + 5$ 는 곡선 $y = 2^x$ 을 y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이야. 그럼 점근선도 평행이동 되겠지?

- ① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

1st 곡선 $y = 2^x + 5$ 의 점근선을 구하자.

곡선 $y = 2^x + 5$ 는 곡선 $y = 2^x$ 을 y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이

므로 곡선 $y = 2^x + 5$ 의 점근선은 직선 $y = 5$ 이다.

곡선 $y = 2^x$ 의 점근선은 직선 $y = 0$ 이므로 곡선 $y = 2^x$ 을 y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 곡선 $y = 2^x + 5$ 의 점근선은 직선 $y = 5$ 가 되는 거야.

2nd 직선 $y = 5$ 와 곡선 $y = \log_3 x + 3$ 의 교점의 x 좌표를 구하자.

$y = 5$ 를 $y = \log_3 x + 3$ 에 대입하면

$$5 = \log_3 x + 3$$

$$\log_3 x = 2$$

$$\therefore x = 3^2 = 9$$

$a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때, $a^x = N \iff x = \log_a N$

따라서 구하는 교점의 x 좌표는 9이다.

C 08 정답 ② *로그함수의 그래프 위의 점 [정답률 90%]

[정답 공식: 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $f(a)=b$ 가 성립한다.]

곡선 $y=\log_2(ax+b)$ 가
점 $(-1, 0)$ 과 점 $(0, 2)$ 를 지
날 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$
의 값은? (3점)

① 5 ② 7
③ 9 ④ 11 **단서** 곡선의 방정식에 $x=-1, y=0$ 을 대입했을 때와
 $x=0, y=2$ 를 대입했을 때 방정식이 성립한다는
거야.

1st 곡선 $y=f(x)$ 가 점 (a, β) 를 지나면 $\beta=f(a)$ 가 성립해.
 $y=\log_2(ax+b)$ 가 두 점 $(-1, 0), (0, 2)$ 를 지나므로
 $0=\log_2(-a+b)$ 에서 $-a+b=1$ 이므로
 $a=b-1 \dots \textcircled{1} \rightarrow -a+b=2^0=1$
 $2=\log_2 b$ 에서 $b=4 \dots \textcircled{2} \rightarrow b=2^2=4$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $a=3$ 이므로
 $a+b=3+4=7$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

C 09 정답 ⑤ *지수함수의 그래프 [정답률 84%]

[정답 공식: 점 A의 x 좌표를 구한 후 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.]

단서 1 점 A의 x 좌표를 구해야겠지?
지수함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 한 점 A의 y 좌표가 $\frac{1}{3}$ 이다.
이 그래프 위의 한 점 B에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는
점 C가 y 축 위에 있을 때, 점 B의 y 좌표는? (3점)

단서 2 내분점의 좌표를 구하는
공식을 이용해 선분 AB
를 1:2로 내분하는 점 C
의 좌표를 구하자.

① 3 ② $3^3\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $3^3\sqrt{9}$ ⑤ 9

1st 점 A의 y 좌표를 이용하여 x 좌표를 구하자.
지수함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점 A의 x 좌표를 a 라 하면 y 좌표가 $\frac{1}{3}$ 이
므로
 $3^a=\frac{1}{3}=3^{-1} \therefore a=-1$
즉, 점 A의 좌표는 $A(-1, \frac{1}{3})$ 이다.

2nd 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용해 점 C의 좌표를 구해봐.

점 $A(-1, \frac{1}{3})$ 이고 점 B의 x 좌표를 b 라 하면 점 $B(b, 3^b) \dots \textcircled{1}$ 이다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점 C의 좌표를 구하면

$$C\left(\frac{1 \times b + 2 \times (-1)}{1+2}, \frac{1 \times 3^b + 2 \times \frac{1}{3}}{1+2}\right) = C\left(\frac{b-2}{3}, \frac{3^b + \frac{2}{3}}{3}\right)$$

그런데 점 C는 y 축 위의 점이므로
 y 축 위의 점의 x 좌표는 0이야.
 $\frac{b-2}{3}=0 \therefore b=2$

[선분의 내분점] ←
두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$
를 이은 선분 PQ를 $m:n$ 으
로 내분하는 점의 좌표는

따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 점 B의 y 좌표는 $3^b=3^2=9$ 이다. $(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n})$

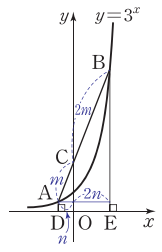
특목 풀이: 점 $B(b, 3^b)$ 라 하면 점 A에서 y 축에, 점 C에서 직선 $x=b$ 에 각각
수선의 발을 내려 만든 두 직각삼각형의 닮음비가 1:2임을 이용하기

두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 D, E
라 하면 y 축 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$ 이
므로 $\overline{DO}:\overline{OE}=1:2$ 가 돼.

그런데 점 A와 점 D의 x 좌표는 같으므로 점 D의
 x 좌표는 -1 이야.

즉, $\overline{DO}=1$ 이고, $\overline{DO}:\overline{OE}=1:2$ 에서 $\overline{OE}=2$ 이므
로 점 B의 x 좌표가 2임을 알 수 있어.

따라서 지수함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점 B의 x 좌표가 2이므로
 y 좌표는 $3^2=9$ 야.



심수 두 점 E와 B의 x 좌표가 같아.

C 10 정답 ③ *지수함수의 그래프 [정답률 92%]

[정답 공식: 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)$ 는 함수 $f(x)$ 의 식에 $x=a$ 를 대입하여 나
온 결과를 의미한다.]

지수함수 $f(x)=a^x$ 의 그래프가 그림과 같다.
 $f(b)=3, f(c)=6$ 일 때, $f(\frac{b+c}{2})$ 의 값은?
단서 $f(b)=3, f(c)=6$ 이므로
 $a^b=3, a^c=6$ 이야. (3점)

① 4 ② $\sqrt{17}$
③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$
⑤ $2\sqrt{5}$

1st $a^m \times a^n = a^{m+n}, a^{mn} = (a^m)^n$ 임을 이용하자.

$f(b)=a^b=3, f(c)=a^c=6$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b+c}{2}\right) &= a^{\frac{b+c}{2}} = (a^{b+c})^{\frac{1}{2}} = (a^b a^c)^{\frac{1}{2}} \\ &= (3 \times 6)^{\frac{1}{2}} = 18^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2} \\ 18^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

다른 풀이: 로그의 정의를 이용하여 값 구하기

$f(b)=a^b=3, f(c)=a^c=6$ 에서 $b=\log_a 3, c=\log_a 6$

이때, $b+c=\log_a 3+\log_a 6$
[로그의 정의]
 $a>0, a \neq 1, b>0$ 일 때,
 $a^x=b \iff x=\log_a b$
 $=\log_a(3 \times 6)$
 $=\log_a 18$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b+c}{2}\right) &= a^{\frac{b+c}{2}} = (a^{b+c})^{\frac{1}{2}} \\ &= (a^{\log_a 18})^{\frac{1}{2}} = 18^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2} \\ &\quad \xrightarrow{a^{\log_a b} = b, a^{\log_a b} = b^{\log_a a}} \end{aligned}$$

C 11 정답 ⑤ *지수함수의 그래프 [정답률 82%]

[정답 공식:] 점 P의 x 좌표를 a 라 하면 점 P의 좌표는 $(a, 4^a)$ 으로 나타낼 수 있다. 선분 OP의 내분점의 좌표를 a 를 이용해 나타낸 뒤 $y=2^x$ 에 대입한다.

원점 O에서 함수 $f(x)=4^x$ 위의 한 점 P를 잇는 선분 OP가 있다. 함수 $g(x)=2^x$ 의 그래프가 선분 OP를 1:3으로 내분할 때, 점 P의 x 좌표는? (3점)

[단서] 선분 OP의 내분점의 좌표를 먼저 구한 후 이 점이 함수 $g(x)$ 의 그래프 위의 점임을 이용하자.

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{6}{7}$

④ 1 ⑤ $\frac{8}{7}$

1st 점 P의 x 좌표를 a 라 놓고 선분 OP를 1:3으로 내분하는 점의 좌표를 구해.

점 P의 x 좌표를 a 라 하면 점 P는 지수함수 $y=4^x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $P(a, 4^a)$ 이다.

원점 O와 점 $P(a, 4^a)$ 을 잇는 선분 OP를 1:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times a + 3 \times 0}{1+3}, \frac{1 \times 4^a + 3 \times 0}{1+3} \right)$$

$$= \left(\frac{a}{4}, \frac{4^a}{4} \right) = \left(\frac{a}{4}, 2^{2a-2} \right) \dots \textcircled{1}$$

[선분의 내분점] 두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 PQ를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$

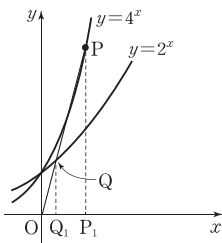
2nd $a^m = a^n (a > 0, a \neq 1)$ 이 성립하려면 $m=n$ 이어야 해.

이 내분점 $\textcircled{1}$ 이 지수함수 $g(x)=2^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2^{2a-2} = 2^{\frac{a}{4}}, \quad 2a-2 = \frac{a}{4}$$

$$\therefore a = \frac{8}{7}$$

특독 풀이: 두 직각삼각형의 닮음비를 이용하여 값 구하기



점 P의 좌표를 $P(a, 4^a)$ 이라 하고, 선분 OP를 1:3으로 내분하는 함수 $g(x)$ 의 그래프 위의 점을 $Q(b, 2^b)$ 이라 하자.

두 점 P, Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1 이라 하면

$\overline{PP_1} \parallel \overline{QQ_1}$ 이고, $\overline{OQ} : \overline{OP} = 1:4$ 이므로

$$\overline{OQ_1} : \overline{OP_1} = 1:4 \text{에서 } b:a = 1:4, \quad 4b = a$$

$$\therefore b = \frac{a}{4} \dots \textcircled{1}$$

또한, $\overline{QQ_1} : \overline{PP_1} = 1:4$ 에서 $2^b : 4^a = 1:4$

$$\therefore 4 \times 2^b = 4^a \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$4 \times 2^{\frac{a}{4}} = 4^a, \quad 2^2 \times 2^{\frac{a}{4}} = 2^{2a}, \quad 2^{2+\frac{a}{4}} = 2^{2a}$$

$$2 + \frac{a}{4} = 2a, \quad \frac{7}{4}a = 2$$

$$\therefore a = \frac{8}{7}$$

C 12 정답 ⑤ *지수함수의 그래프 [정답률 77%]

[정답 공식:] $a > 0$ 일 때, $a^x = \beta$ 가 성립하면 $x = \log_a \beta$ 가 성립한다.

[단서 1] 점 $(p, -p)$ 는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이야.

$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 직선 $y=-x$ 가 곡선 $y=a^x$ 과 만나는 점의 좌표를 $(p, -p)$, 곡선 $y=a^{2x}$ 과 만나는 점의 좌표를 $(q, -q)$ 라 할 때, $\log_a pq = -8$ 이다. $p+2q$ 의 값은? (3점)

[단서 2] 점 $(q, -q)$ 는 곡선 $y=a^{2x}$ 위의 점이야.

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

1st 주어진 조건을 이용하여 p, q 에 대한 식을 각각 구해.

$$\text{곡선 } y=a^x \text{이 점 } (p, -p) \text{를 지나므로 } -p = a^p \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, 곡선 } y=a^{2x} \text{이 점 } (q, -q) \text{를 지나므로 } -q = a^{2q} \dots \textcircled{2}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $b=f(a)$ 가 성립해.

2nd 구한 식을 변형하여 $p+2q$ 의 값을 구해.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 변형 곱하면 } (-p) \times (-q) = \frac{a^p \times a^{2q}}{a^p \times a^{2q}} \text{에서 } pq = a^{p+2q}$$

$$\text{따라서 로그의 정의에 의하여 } p+2q = \log_a pq = -8$$

$a^x = N \text{이면 } x = \log_a N$

다른 풀이: 로그의 정의 사용하기

로그의 정의에 의하여 $\textcircled{1}$ 에서 $p = \log_a (-p)$ 이고 $\textcircled{2}$ 에서 $2q = \log_a (-q)$ 이다. 이 두 식을 변형 더하면

$$p+2q = \log_a (-p) + \log_a (-q) = \log_a (-p) \times (-q) = \log_a pq = -8$$

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

C 13 정답 ② *지수함수의 그래프 [정답률 73%]

[정답 공식:] 집합 G 의 원소가 의미하는 것은 함수 $y=5^x$ 의 그래프 위의 점이다.

집합 $G = \{(x, y) | y=5^x, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? (3점)

[보기]

① $(a, b) \in G$ 이면 $\left(\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right) \in G$ 이다. **[단서 1]** ①의 조건을 $y=5^x$ 에 대입하여 얻은 식을 이용하여 ②의 조건을 대입한 식이 나오는지 확인하자.

② $(-a, b) \in G$ 이면 $\left(a, \frac{1}{b}\right) \in G$ 이다.

③ $(2a, b) \in G$ 이면 $(a, b^2) \in G$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 주어진 식에 대입해 보고 조건을 만족시키는지 판별해.

집합 $G = \{(x, y) | y=5^x, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여

$$\neg. (a, b) \in G \text{이므로 } b = 5^a \dots \textcircled{1} \text{이다.}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변을 } \frac{1}{2} \text{제곱하면 } \sqrt{b} = 5^{\frac{a}{2}} \therefore \left(\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right) \in G \text{ (참)}$$

$\hookrightarrow b^{\frac{1}{2}} = (5^a)^{\frac{1}{2}} \therefore \sqrt{b} = 5^{\frac{a}{2}}$

$$\neg. (-a, b) \in G \text{이므로 } b = 5^{-a} \dots \textcircled{2} \text{이다.}$$

$$\textcircled{2} \text{의 양변을 } -1 \text{제곱하면 } \frac{1}{b} = 5^a \therefore \left(a, \frac{1}{b}\right) \in G \text{ (참)}$$

$\hookrightarrow b^{-1} = (5^{-a})^{-1} \therefore \frac{1}{b} = 5^a$

$$\neg. (2a, b) \in G \text{이므로 } b = 5^{2a} \dots \textcircled{3} \text{이다.}$$

$$\textcircled{3} \text{의 양변을 제곱하면 } b^2 = 5^{4a} \therefore (4a, b^2) \in G \Rightarrow (a, b^2) \notin G \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

한편, 직선 l 과 두 직선 $y=\log_2 a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $(b-a)$ 이고, 높이가 $(\log_2 b - \log_2 a)$ 인 직각삼각형이고 그 넓이가 2이므로 $\frac{1}{2} \times (b-a) \times (\log_2 b - \log_2 a) = 2 \dots \textcircled{c}$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\frac{1}{2} \times (b-a) \times (b-a) = 2, (b-a)^2 = 4$$

$$\therefore b-a=2 (\because a < b) \dots \textcircled{d}$$

따라서 ㉔을 ㉔에 대입하면

$$\log_2 b - \log_2 a = 2, \log_2 \frac{b}{a} = 2 \quad \therefore b = 4a \dots \textcircled{e}$$

$$\textcircled{d}, \textcircled{e} \text{을 연립하면 } a = \frac{2}{3}, b = \frac{8}{3} \quad \therefore a+b = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

주의
근호 안에 제곱 꼴의 식이 나오는 경우에는 항상 절댓값을 사용해야 하므로 주어진 조건에 유의하여 0보다 큰지 작은지를 확인할 수 있도록 하자.



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

C 159 정답 ② *지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 [정답률 35%]

[정답 공식] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 값을 각각 구한다.

두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \leq -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? (4점)

단서1 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x \leq -8$ 일 때 점근선이 $y=b$ 이면서 증가하는 모양이고, $x > -8$ 일 때 점근선이 $y=8$ 이면서 감소하는 모양이다.

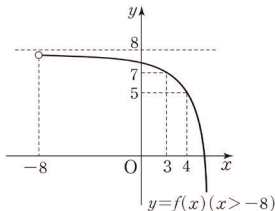
단서2 $x \leq k$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 정수인 것의 개수가 2라는 거지?
집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이다.

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

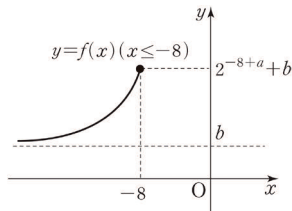
1st 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려봐.

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \leq -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases} \text{에 의하여 함수 } y=f(x) \text{의 그래프는}$$

$x > -8$ 일 때 함수 $y = -3^{x-3} + 8$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프로 [그림 1]과 같고, $x \leq -8$ 일 때 함수 $y = 2^{x+a} + b$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프로 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

2nd 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 값을 각각 구하고 $a+b$ 를 계산해.

$3 \leq k < 4$ 인 실수 k 에 대하여 $-8 < x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값이 정수가 되는 경우는 $f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$ 이다.

$3 < x < 4$ 에서 $f(x)=6$ 을 만족시키는 x 의 값을 a 라 하자.

$3 < k < 4$ 일 때 $-8 < x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것은 7 뿐이고,

$a \leq k < 4$ 일 때 $-8 < x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것은 6, 7이야.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x \leq -8$ 인 경우에 $f(x)$ 의 값이 정수가 되는 경우는 $f(x)=6$ 뿐이어야 하므로

$b=5$ 이고 $6 \leq f(-8) < 7$ 이어야 한다. 수능 해강을 참고해

$5 \leq b < 6$ 이면 되는데 b 는 자연수이어서 $b=5$ 야.

즉, $6 \leq 2^{-8+a} + 5 < 7$ 에서 $1 \leq 2^{-8+a} < 2$

$$2^0 \leq 2^{-8+a} < 2^1, 0 \leq -8+a < 1$$

$y=2^x$ 은 증가함수이므로 x 의 값이 커지면 y 의 값도 커지지? 즉, $2^a < 2^b$ 이면 $a < b$ 야.

$$\therefore 8 \leq a < 9$$

그런데 a 는 자연수이므로 $a=8$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 에 대하여

$$a+b=8+5=13 \text{이다.}$$

수능 해강

*조건을 만족시키기 위해 $x \leq -8$ 일 때의 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것은 왜 6 뿐이어야 할까?

$3 < x < 4$ 에서 $f(x)=6$ 을 만족시키는 x 의 값을 a 라 하자.

(i) $x \leq -8$ 일 때 $f(x)$ 의 값 중 6, 7이 아닌 정수가 존재한다고 하면

$x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것은 $3 \leq k < a$ 일 때 최소 2개이고, $a \leq k < 4$ 일 때 최소 3개야. 즉, 정수인 것의 개수가 2라는 조건을

만족시키지 않으므로 $x \leq -8$ 일 때 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것은 6, 7을 제외한 다른 정수가 존재하면 안 돼.

(ii) $x \leq -8$ 일 때 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것이 6과 7로 2개라면

$3 \leq k < 4$ 가 아닌 다른 k 의 값에 대해서도 $x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것의 개수가 2가 돼.

예를 들어 $x \leq 0$ 일 때도 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것의 개수가 6, 7로 2가 돼.

즉, 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 범위 $3 \leq k < 4$ 에 모순이야.

(iii) $x \leq -8$ 일 때 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것이 7 뿐이라면

$3 \leq k < a$ 일 때 $x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것의 개수는 7로 1이야. 즉, 정수인 것의 개수가 2라는 조건을 만족시키지 않아.

(iv) $x \leq -8$ 일 때 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것이 6 뿐이라면

$3 \leq k < 4$ 일 때 $x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것의 개수는 6, 7로 2야. $k \geq 4$ 일 때 $x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것의 개수는 7, 6, 5, ...로 최소 3이야.

$k < 3$ 일 때 $x \leq k$ 에서 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것의 개수는 6으로 1이야. 즉, 모든 조건을 만족시켜.

(i)~(iv)에 의하여 $x \leq -8$ 일 때 $f(x)$ 의 값 중 정수인 것은 6 뿐이어야 해.

C 160 정답 36 *지수함수의 그래프의 교점 [정답률 35%]

[정답 공식] 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 t 라 하면 t 는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근이다.

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하자.

단서1 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$, $y=x$ 를 연립한 방정식의 해가 $x=k$ 라는 거야.

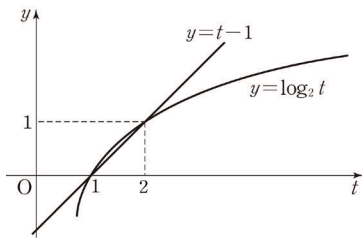
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$x > k$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \text{이고 } f(f(x)) = 3x \text{이다.}$$

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$ 의 값을 구하시오. (4점)

단서2 구하는 값과 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$, $y=x$ 를 연립한 방정식의 관계를 살펴봐.



[그림 4]

그런데 [그림 4]에서 $1 < t < 2$ 일 때 곡선 $y = \log_2 t$ 가 직선 $y = t - 1$ 의 위쪽에 있으므로 $t - 1 < \log_2 t$ 이다. 따라서 $1 < t < 2$ 일 때 부등식 ①을 만족시키지 않으므로 $f(t) < t$ 이다. 즉, 명제 ㄷ은 거짓이므로 $C = 0$ 이다.

$$\therefore A + B + C = 100 + 10 + 0 = 110$$



My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 킬러 전략

보기 ㄴ을 해결할 때, $t - \log_2 x = 2^{x-t}$ 에서 t 를 우변으로 이항하여 두 곡선 $y = 2^{x-t} - t$ 와 $y = -\log_2 x$ 의 교점의 x 좌표를 $f(t)$ 로 본다면 로그함수 $y = -\log_2 x$ 는 고정된 상태이고 지수함수 $y = 2^{x-t} - t$ 만 t 의 값이 변함에 따라 x 축, y 축으로 평행이동하는 상태임을 알 수 있어. 따라서 실수 t 의 변화에 따른 지수함수 그래프의 개형을 그려보면서 $f(t)$ 의 증감을 쉽게 파악할 수 있지.

C 171 정답 457 ① 등급 대비 [정답률 6%]

정답 공식: 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 지나는 곡선의 방정식과 점 B를 지나는 곡선의 방정식에 점의 좌표를 각각 대입하여 점 B의 좌표를 구한다.

곡선 $y = \log_{16} (8x+2)$ 위의 점 $A(a, b)$ 와 곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$

위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가

단서2 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있으므로 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 점 B의 $(y\text{좌표})$ 의 값은 서로 같다.

$(\frac{77}{8}, \frac{133}{8})$ 일 때, $a \times b = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (4점)

단서1 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 함수 $y = \log_{16} (8x+2)$ 의 역함수의 그래프 위의 점이다.

단서+발상 [유형 19+20]

단서1 점 A가 곡선 $y = \log_{16} (8x+2)$ 위의 점이므로 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 함수 $y = \log_{16} (8x+2)$ 의 역함수의 그래프 위의 점이다.

(개념)

단서2 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있으므로 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 O를 지나는 직선의 기울기는 직선 OB의 기울기와 서로 같음을 이용하여 점 B의 좌표를 잡는다. (발상) 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 지나는 곡선의 방정식에 이 점의 좌표를 대입하여 만든 식과 점 B를 지나는 곡선의 방정식에 점 B의 좌표를 대입하여 만든 식을 비교하여 점 B의 좌표를 결정하고 선분 AB의 중점의 좌표를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다. (해결)

----- [문제 풀이 순서] -----

1st 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 지나는 곡선의 방정식을 이용하여 식을 하나 세우자.

점 $A(a, b)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 점 A' 의 좌표는 (b, a) 이다. 점 (x, y) 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (y, x) 이다. 이때, 함수 $y = \log_{16} (8x+2)$ 의 역함수를 구하기 위해 x, y 를 서로 바꾸면 $x = \log_{16} (8y+2)$ 에서 $8y+2 = 16^x, 8y = 16^x - 2$

$$\therefore y = \frac{1}{8} \times 16^x - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times 4^{2x} - \frac{1}{4}$$

한편, 점 $A'(b, a)$ 는 곡선 $y = \frac{1}{8} \times 4^{2x} - \frac{1}{4}$ 위의 점이므로

$$a = \frac{1}{8} \times 4^{2b} - \frac{1}{4} \dots \textcircled{1} \quad \text{점 A'은 점 A를 직선 } y=x \text{에 대하여 대칭이동한 점이고 곡선 } y = \frac{1}{8} \times 4^{2x} - \frac{1}{4} \text{은 곡선 } y = \log_{16} (8x+2) \text{를 직선 } y=x \text{에 대하여 대칭이동한 곡선이므로 점 A'은 곡선 } y = \frac{1}{8} \times 4^{2x} - \frac{1}{4} \text{ 위에}$$

2nd 점 B의 좌표를 구해. 점 $A'(b, a)$ 가 직선 OB 위의 점이므로 0이 아닌 실수 k 에 대하여

점 B의 좌표를 (kb, ka) 라 하면 점 B는 곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$, 즉

직선 OA'의 기울기는 $\frac{a-0}{b-0} = \frac{a}{b}$ 이므로 직선 OB의 기울기도 $\frac{a}{b}$ 이어야 해.

이때, 0이 아닌 실수 k 에 대하여 점 B의 좌표를 (kb, ka) 라 하면

직선 OB의 기울기는 $\frac{ka-0}{kb-0} = \frac{a}{b}$ 이므로 $B(kb, ka)$ 라 놓을 수 있는 거야.

$$y = \frac{1}{4} \times 4^x - \frac{1}{2} \text{ 위의 점이므로 } ka = \frac{1}{4} \times 4^{kb} - \frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

①의 양변에 k 를 곱하면 $ka = \frac{k}{8} \times 4^{2b} - \frac{k}{4}$ 이고 이것을 ②에 대입하면

$$\frac{k}{8} \times 4^{2b} - \frac{k}{4} = \frac{1}{4} \times 4^{kb} - \frac{1}{2}$$

이것을 만족시키는 k 의 값은 2이므로 점 B의 좌표는 $(2b, 2a)$ 이다.

3rd 선분 AB의 중점의 좌표를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구해.

두 점 $A(a, b), B(2b, 2a)$ 에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$(\frac{a+2b}{2}, \frac{b+2a}{2}) \text{이고 이 점이 } (\frac{77}{8}, \frac{133}{8}) \text{이므로}$$

$$\frac{a+2b}{2} = \frac{77}{8} \text{에서 } 4a+8b=77 \dots \textcircled{3} \quad \text{두 점 } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{를 잇는 선분의 중점의 좌표는 } (\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2})$$

$$\frac{b+2a}{2} = \frac{133}{8} \text{에서 } 8a+4b=133 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \times 2 - \textcircled{4} \text{을 하면 } 12b=21 \text{에서 } b=\frac{7}{4}$$

이것을 ③에 대입하면

$$4a+8 \times \frac{7}{4} = 77 \text{에서 } 4a=63 \quad \therefore a=\frac{63}{4}$$

$$\therefore a \times b = \frac{63}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{441}{16}$$

따라서 $p=16, q=441$ 이므로 $p+q=16+441=457$

1등급 대비 특강

* 지수함수와 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

어려운 지수함수, 로그함수 문제를 풀면서 항상 유심히 지켜봐야 하는 것이 있어. 그건 바로 그래프의 평행이동과 대칭이동이야. 최근 고난도 지수함수의 그래프나 로그함수의 그래프의 문제에서는 문제 속에 숨겨진 평행이동과 대칭이동을 찾아야 문제가 풀리는 경우가 많아. 고난도 문제에서 자신이 발견하지 못한 평행이동이나 대칭이동은 없는지 살펴보고 다음에 비슷한 문제를 풀 때 의식적으로 평행이동과 대칭이동을 발견할 수 있도록 자신만의 루틴을 만들어 보자!



F 94 정답 ③ *사인법칙

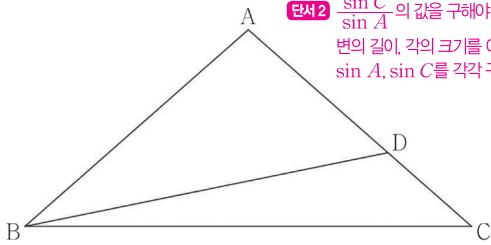
[정답 공식: 삼각형 ABC에서 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ 가 성립한다.]

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5:3으로 내분하는 점을 D라 하자.

단서 1 두 선분 AD, CD의 길이의 비가 주어진 가.

$2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$ 일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값은? (4점)

단서 2 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값을 구해야 하니까 변의 길이, 각의 크기를 이용하여 $\sin A, \sin C$ 를 각각 구해 보.



- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

1st 두 삼각형 ABD, BCD에서 사인법칙을 적용해.

점 D가 선분 AC를 5:3으로 내분하는 점이므로 양수 t 에 대하여 $\overline{AD} = 5t$, $\overline{CD} = 3t$ 라 하면 두 삼각형 ABD, BCD에서 사인법칙에 의하여

두 삼각형 ABD, BCD는 변 BD를 공통으로 가지고 있으니까 이 선분을 이용하여 사인법칙을 적용해.

$$\frac{5t}{\sin(\angle ABD)} = \frac{\overline{BD}}{\sin A}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\overline{BD} \times \sin(\angle ABD)}{5t} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{3t}{\sin(\angle DBC)} = \frac{\overline{BD}}{\sin C}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\overline{BD} \times \sin(\angle DBC)}{3t} \dots \textcircled{2}$$

2nd $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값을 구해.

$$2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC) \text{에서}$$

$$\frac{\sin(\angle DBC)}{\sin(\angle ABD)} = \frac{2}{5} \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여}$$

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\overline{BD} \times \sin(\angle DBC)}{\overline{BD} \times \sin(\angle ABD)} = \frac{5\sin(\angle DBC)}{3\sin(\angle ABD)} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$$

☆ 사인법칙과 코사인법칙

개념·공식

삼각형의 외접원의 반지름의 길이가 R 일 때 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(2) 코사인법칙

$$\textcircled{1} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\textcircled{2} b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$\textcircled{3} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

F 95 정답 ④ *사인법칙과 삼각형의 외접원

[정답률 65%]

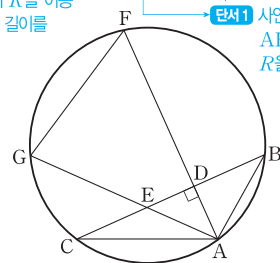
[정답 공식: 반지름의 길이가 R 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 이 성립한다.]

그림과 같이 $\overline{BC} = 8$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 두 점 D, E를 $\overline{BD} = \overline{CE} = 3$ 이 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 외접원이 두 직선 AD, AE와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 F, G라 하자. 직선 BC와 직선 AF가 서로 수직이고, $\overline{AD} = \sqrt{5}$ 이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R , 선분 FG의 길이를 l 이라 할 때, $R \times l$ 의 값은?

단서 2 두 삼각형 ABC, AFG는 한 원에 내접하므로 외접원의 반지름의 길이 R 을 이용하여 선분 FG의 길이를 구하면 돼.

(단, $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$) (4점)

단서 1 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R 을 구하면 돼.



- ① $\frac{35}{2}$ ② 21 ③ $\frac{49}{2}$ ④ 28 ⑤ $\frac{63}{2}$

1st 두 선분 AC, AB의 길이를 각각 구해.

$$\overline{BC} = 8, \overline{BD} = \overline{CE} = 3 \text{이므로 } \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 8 - 3 = 5$$

이때, $\overline{AD} = \sqrt{5}$ 이고, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 이므로 직각삼각형 ADC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{5^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{30}$$

또, 직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{14}$$

2nd 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R 의 값을 구해.

$\angle ACB = \alpha$ 라 하면 직각삼각형 ADC에서

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R 이므로

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

반지름의 길이가 R 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{이 성립하고 이를 사인법칙이라 해.}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \alpha} = 2R, \frac{\sqrt{14}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = 2R, 2R = \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{21} \quad \therefore R = \sqrt{21}$$

3rd 선분 FG의 길이 l 의 값을 구해.

$$\text{직각삼각형 ADE에서 } \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{CE} = 5 - 3 = 2,$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3 \text{이므로 } \angle DAE = \beta \text{라 하면}$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{2}{3}$$

이때, 삼각형 AFG의 외접원의 반지름의 길이는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 $R = \sqrt{21}$ 과 같으므로 삼각형 AFG에서 사인법칙에

$$\text{의하여 } \frac{\overline{FG}}{\sin \beta} = 2R, \frac{l}{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{21} \quad \therefore l = 2\sqrt{21} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$$

$$\therefore R \times l = \sqrt{21} \times \frac{4\sqrt{21}}{3} = 28$$

$$\begin{aligned} &\text{즉, } (m-1)(d-2)=10 \\ &(m-1)\left(\frac{20}{11-m}-2\right)=10 \quad (\because \textcircled{3}) \\ &(m-1)\{20-2(11-m)\}=10(11-m) \\ &(m-1)(2m-2)=10(11-m) \\ &(m-1)(m-1)=5(11-m) \\ &m^2-2m+1=55-5m \\ &m^2+3m-54=0 \\ &(m-6)(m+9)=0 \\ &\therefore m=6 \text{ 또는 } m=-9 \\ &m \text{은 자연수이므로 } m=6 \Rightarrow d=\frac{20}{11-6}=4 \quad (\because \textcircled{3}) \\ &\text{이것을 } \textcircled{5} \text{에 대입하면} \\ &a_1=1+(6-2) \times 4=17 \end{aligned}$$

다른 풀이: $a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}$ 을 직접 구하여 d 를 m 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - d \\ a_3 &= a_2 - d = a_1 - 2d \\ a_4 &= a_3 - d = a_1 - 3d \\ &\vdots \\ a_{m-2} &= a_1 - (m-3)d \quad \textcircled{1} \\ a_{m-1} &= a_1 - (m-2)d \quad \textcircled{2} \\ a_m &= a_1 - (m-1)d \quad \textcircled{3} \\ a_n < 0 \text{인 자연수 } n \text{의 최솟값을 } m \text{이라 하므로 } a_m < 0 \text{이고, } a_m \text{이 처음으로 음수가 되는 항이야.} \\ &\text{조건 (가)에서} \\ a_{m-2} + a_{m-1} + a_m \\ &= \{a_1 - (m-3)d\} + \{a_1 - (m-2)d\} + \{a_1 - (m-1)d\} \\ &\quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3a_1 - 3md + 6d = 3 \\ &\therefore a_1 - md + 2d = 1 \Rightarrow a_1 = md - 2d + 1 \quad \textcircled{4} \\ &\text{조건 (나)에서} \\ a_1 + a_{m-1} &= -9(a_m + a_{m+1}) \\ a_1 + (a_1 - md + 2d) \\ &= -9\{(a_1 - md + d) + (a_1 - md + d + d)\} \quad (\because \textcircled{4}, \textcircled{3}, \textcircled{1}) \\ 20a_1 - 19md + 29d &= 0 \\ \text{여기에 } \textcircled{4} \text{을 대입하면} \\ 20(md - 2d + 1) - 19md + 29d &= 0 \\ md - 11d + 20 = 0 \quad \therefore d &= \frac{20}{11-m} \\ &(\text{이하 동일}) \end{aligned}$$

My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 대비 전략

귀납적으로 정의된 수열에서 첫째항부터 나열을 통해 규칙을 발견할 수 있지만, 역으로 어떤 항이 주어지고 첫째항까지 거꾸로 추적해 나가는 경우도 있어. 이럴 때는 a_n 의 값의 조건을 잘 확인하여 이를 만족시키도록 하는 수열 $\{a_n\}$ 을 구해야 해.

1 회 수학 I 실전 기출 모의고사

문제편
p. 312

101 정답 ⑤ *로그의 계산 [정답률 97%]

(정답 공식: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$)

$27^{\frac{1}{3}} + \log_2 4$ 의 값은? (2점) 단서 거듭제곱 꼴은 지수법칙, 로그는 로그의 성질을 이용하여 간단히 해.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙과 로그의 성질을 이용해서 식을 정리해.

질문 이렇게 지수와 로그의 성질을 둘 다 이용해야 하는 문제도 많이 나오지. 지수와 로그의 성질은 기본 중의 기본이니까 제대로 익혀두자.

$$27^{\frac{1}{3}} + \log_2 4 = \underbrace{(3^3)^{\frac{1}{3}}}_{(a^m)^n = a^{mn}} + \log_2 2^2 = 3 + \underbrace{2\log_2 2}_{=1} = 3 + 2 = 5$$

★ 로그

개념 · 공식

a, b, c, x, y 가 양수이고, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ 일 때,

- ① $\log_a a = 1$
- ② $\log_a 1 = 0$
- ③ $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
- ④ $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
- ⑤ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- ⑥ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- ⑦ $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$
- ⑧ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (m \neq 0)$

102 정답 ③ *삼각함수의 최대·최소 - 일차식 꼴 [정답률 89%]

(정답 공식: 함수 $y = \sin x$ 의 최댓값, 최솟값을 이용한다.)

함수 $f(x) = a \sin x + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M - m = 6$ 일 때, 양수 a 의 값은? (3점)

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

단서 함수 $f(x)$ 는 함수 $y = \sin x$ 를 a 배한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수지? 그럼 함수 $y = \sin x$ 의 최댓값과 최솟값을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있어.

1st 함수 $y = \sin x$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -1임을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구해.

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 각 변에 } a \text{를 곱하면} \\ -a \leq a \sin x \leq a \quad (\because a > 0) \rightarrow \text{함수 } y = \sin x \text{의 치역은 } \{y \mid -1 \leq y \leq 1\} \text{이야.} \end{aligned}$$

다시 각 변에 1을 더하면

$$-a + 1 \leq a \sin x + 1 \leq a + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$M = a + 1, m = -a + 1$$

2nd $M - m = 6$ 의 값을 이용해서 양수 a 의 값을 구하자.

$$\text{이때, } M - m = 6 \text{이므로 } M - m = a + 1 - (-a + 1) = 6 \text{에서}$$

$$2a = 6$$

$$\therefore a = 3$$