2024학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수학 영역

▲ 수학 동영상 강의

1회

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

3. $\cos\theta>0$ 이고 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<3) \\ \sqrt{x+1}-a & (x\geq 3)\end{cases}$$

이 $x=3$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

정답 및 해설 p.4

수학 영역

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1,\quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

1회

5지선다형

23. ${}_3\mathrm{H}_3$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

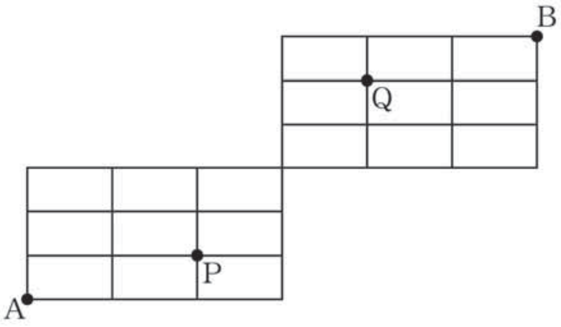
24. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

25. 남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360

26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, P 지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]



① 72 ② 81 ③ 90 ④ 99 ⑤ 108

정답 및 해설 p.9

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

1회

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$ 의 값은? [2점]

① $-\dfrac{1}{3}$ ② $-\dfrac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ 1

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3<a_n<2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=a_1+2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$ 일 때, a_{10} 의 값은? (단, $a_1>0$) [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

정답 및 해설 p.11~12

제 2 교시

수학 영역(기하)

1회

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

24. 초점이 F인 포물선 $y^2=20x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=15$일 때, 점 P의 x좌표는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

25. 두 초점이 x축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 30인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

26. 두 실수 a, b에 대하여 포물선

$$C:(y-a+1)^2=(a+b)x+1 \quad (\text{단, } a+b\neq 0)$$

이 있다. 포물선 C가 원점을 지나고 초점과 준선 사이의 거리가 2일 때, $a-b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

정답 및 해설 p.15

1회 2024학년도 3월 고3 전국연합학력평가

2024년 3월 28일 시행 문제편 p. 1~12

01 정답 ⑤ *지수법칙-밑이 다른 계산(곱셈) [정답률 92%]

(정답 공식: 실수 m, n에 대하여 $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^m\times a^n=a^{m+n}$이다.)

1st 지수법칙을 이용해.

$\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}=54^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}=(3^3\times 2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $\quad (ab)^n=a^nb^n$

$=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}=3^1\times 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}$

$(a^m)^n=a^{mn}$ $\quad a^m\times a^n=a^{m+n}$

$=3\times 2^2=12$

02 정답 ③ *$h\to 0$일 때의 미분계수의 정의 [정답률 89%]

(정답 공식: 함수 $f(x)$에 대해 $x=a$에서의 미분계수를 $f'(a)$라 하고, $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이다.)

1st 미분계수의 정의를 이용하기 위해 식을 변형해.

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\right\}$

미분계수의 정의를 이용하려면 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$이니 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 꼴을 만들어줘야 해.

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{1}{2}f'(3)$

2nd 다항함수의 미분법을 이용해.

$f(x)=x^3-3x^2+x$를 x에 대해 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$이다.

다항함수의 미분법인 $(x^n)'=nx^{n-1}$을 이용해.

따라서 $f'(3)=27-18+1=10$이고 구하고자 하는 값은

$\frac{1}{2}f'(3)=5$

03 정답 ② *삼각함수 사이의 관계-값 구하기 [정답률 85%]

(정답 공식: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

1st 삼각함수의 사이의 관계를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 차례로 구해.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$에서

$\sin\theta+\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$, $2\sin\theta=-1$ $\quad\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

이때, $\cos\theta>0$이므로 $\underbrace{\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

04 정답 ① *연속이 되도록 하는 미정계수의 결정 [정답률 89%]

(정답 공식: 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$이 성립해야 한다.)

1st 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$이 성립해.

함수가 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면

$\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=f(3)$이 성립해야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $x=a$에서의 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재해야 하며, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립해야 해.

$\lim\limits_{x\to 3-}(2x+a)=\lim\limits_{x\to 3+}(\sqrt{x+1}-a)=2-a$

$6+a=2-a$

$2a=-4$

$\therefore a=-2$

05 정답 ④ *도함수가 주어졌을 때 함수 구하기 [정답률 90%]

(정답 공식: $\int f'(x)dx=f(x)+C$(단, C는 적분상수))

1st 다항함수의 부정적분 공식을 이용해.

$f'(x)=x(3x+2)=3x^2+2x$이므로

$f(x)=x^3+x^2+C$(단, C는 적분상수)이다.

$\int(3x^2+2x)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx=x^3+x^2+C$

2nd 적분상수 C의 값을 구해.

$f(1)=6$이므로

$f(1)=1+1+C=2+C=6$

$\therefore C=4$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+4$이다.

3rd $f(0)$의 값을 구해.

$\therefore f(0)=4$

06 정답 ⑤ *등비수열의 합의 활용 [정답률 83%]

(정답 공식: 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$이다.)

1st 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구해.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>1)$이라 하면

$S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$, $S_2=\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$이므로

$\frac{S_4}{S_2}=5$에서

$\dfrac{\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}}=5$

$r^4-1=(r^2-1)(r^2+1)$

$\frac{\boxed{r^4-1}}{r^2-1}=r^2+1=5$, $r^2=4$

$\therefore r=2$ ($\because r>1$)

2nd a_1, a_4의 값을 각각 구하고 a_1, a_4를 계산해.

따라서 $a_n=a_1\times 2^{n-1}$이므로 $a_5=48$에서

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이야.

$a_5=a_1\times 2^4=16a_1=48$

$\therefore a_1=3$

즉, $a_n=3\times 2^{n-1}$이므로

$a_4=3\times 2^3=24$

$\therefore a_1+a_4=3+24=27$

07 정답 ① *함수의 증가와 감소 [정답률 87%]

(정답 공식: 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$가 증가하면 $f'(x)\geq 0$이고, 감소하면 $f'(x)\leq 0$이다.)

1st 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구해.

$f'(x)=x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$

2nd 함수 $f(x)$는 미분가능하므로 $f'(x)\leq 0$인 구간에서 $f(x)$가 감소함을 이용해.

$f'(x)$는 $-1\leq x\leq 5$에서 0 이하의 값을 가진다.

$a>0$이고 $a<\beta$일 때, 이차부등식 $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$야.

따라서 $f(x)$는 $-1\leq x\leq 5$에서 감소한다.

그러므로 $b-a$의 최댓값은

$a=-1$, $b=5$일 때 $5-(-1)=6$

08 정답 ② *$y=f(x)g(x)$ 꼴의 함수에서의 미분계수 [정답률 82%]

(정답 공식: 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$)

1st 주어진 식에 $x=0$을 대입하여 $g(0)$의 값을 구해.

$x=0$을 $(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1$에 대입하면,

주어진 식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떠한 수를 대입하여도 등식이 성립해.

$f(0)+g(0)=1$

이때, $f(0)=4$이므로

$4+g(0)=1$

$\therefore g(0)=-3$

2nd 곱의 미분법을 이용해서 주어진 식을 미분한 후 $x=0$을 대입하여 $f'(0)+g'(0)$의 값을 구해.

주어진 식의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$

곱의 미분법을 이용하면 $\{(x+1)f(x)\}'=(x+1)'f(x)+(x+1)f'(x)$, $\{(1-x)g(x)\}'=(1-x)'g(x)+(1-x)g'(x)$

여기에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9$이고

$f(0)=4$, $g(0)=-3$이므로

$4+f'(0)+3+g'(0)=9$

$\therefore f'(0)+g'(0)=2$

09 정답 ③ *로그의 성질의 응용 [정답률 81%]

(**정답 공식**: $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때, $\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$)

1st 두 직선의 기울기를 각각 구해.

두 점 $(0,\ 0)$, $(\log_2 9,\ k)$를 지나는 직선의 기울기는

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이야.

$$\frac{k-0}{\log_2 9-0}=\frac{k}{\boxed{\log_2 9}}=\frac{k}{2\log_2 3}$$

$\log_2 9=\log_2 3^2=2\log_2 3$

직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$

즉, $y=-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}x+\frac{2}{\log_9 8}$의 기울기는

$$-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}=-\frac{\frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_3 2}=-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}$$

$\log_4 3=\log_{2^2} 3=\frac{1}{2}\log_2 3$, $\log_9 8=\log_{3^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_3 2$

2nd 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용해.

두 직선이 서로 수직이므로

$\frac{k}{2\log_2 3}\times\left(-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}\right)=-1$에서

$-\frac{k}{6\log_3 2}=-1$

$\therefore k=6\log_3 2=\log_3 2^6=\log_3 64$

$\therefore 3^k=3^{\log_3 64}=64$

$a^{\log_a b}=b$

10 정답 ④ *점이 움직인 거리 [정답률 50%]

(**정답 공식**: 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치는 속도를 적분하고 움직인 거리는 속도의 절댓값을 적분한다.)

1st 두 점 P, Q의 위치를 t에 대한 식으로 표현해.

점 P의 위치를 $x_1(t)$, 점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하자.

$x_1(t)=\int_0^t v_1(t)dt=\int_0^t (3t^2-6t-2)dt=t^3-3t^2-2t$

$x_2(t)=\int_0^t v_2(t)dt=\int_0^t (-2t+6)dt=-t^2+6t$

$t=0$에서의 위치가 원점이므로 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$이야.

2nd 두 점 P, Q가 다시 만나는 시각을 구해.

두 점 P, Q가 다시 만나려면 두 점의 위치가 같아야 한다.

따라서 방정식 $t^3-3t^2-2t=-t^2+6t$를 만족시키는 t의 값이 두 점이 만날 때이다.

$x_1(t)=x_2(t)$야.

$t^3-2t^2-8t=t(t^2-2t-8)=t(t-4)(t+2)=0$이므로

$t=-2$ 또는 $t=0$ 또는 $t=4$

그런데 $t=0$인 경우가 출발한 시각이고, $t\geq0$이므로

출발한 지점이 같으므로 $t=0$일 때의 위치가 같고, 그 이후의 시각의 값은 0보다 커야 해.

$t=4$일 때, 두 점 P, Q가 다시 만난다.

3rd $t=4$일 때까지 점 Q가 움직인 거리를 구해.

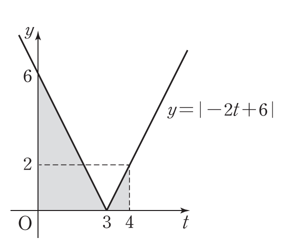
따라서 점 Q가 $t=0$에서 $t=4$일 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v_2(t)|dt=\int_0^4 |-2t+6|dt$$
$$=\int_0^3 (-2t+6)dt+\int_3^4 (2t-6)dt$$

$|-2t+6|=\begin{cases}-2t+6 & (0\leq t\leq3)\\ 2t-6 & (3<t\leq4)\end{cases}$이므로 구간을 나눠 이렇게 나타낼 수 있어.

$$=[-t^2+6t]_0^3+[t^2-6t]_3^4$$
$$=(-9+18)+\{(16-24)-(9-18)\}$$
$$=10$$

다른 풀이: $\int_0^4 |-2t+6|dt$의 값을 그래프를 이용하여 구하기



구하고자 하는 정적분의 값은 위 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같아.

따라서 두 삼각형의 넓이의 합으로 답을 구하면

$\frac{1}{2}\times3\times6+\frac{1}{2}\times1\times2=9+1=10$

11 정답 ② *$\sum$와 등차수열의 합 [정답률 55%]

(**정답 공식**: 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$이다.)

1st 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항의 부호를 따져 봐.

$a_6=-2$로 음의 정수이고 공차도 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수야.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 음의 정수이고

$a_6=-2$이므로 6 이상인 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 음수이므로 n의 값이 커지면 a_n의 값은 작아져.

또한, 공차를 d라 하면 $a_4=a_6-2d=-2-2d\geq0$이므로

4 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이다.

d가 음의 정수이므로 $d=-1$일 때 $a_4=0$이고 $d\leq-2$일 때 $a_4>0$이야.

한편, $a_5=a_6-d=-2-d$이므로

$d=-1$일 때 $a_5=-1<0$이고, $d\leq-2$일 때 $a_5\geq0$이다.

2nd a_5의 값의 부호에 따라 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구해.

(i) $a_5=-1<0$일 때,

4 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이고 5 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n<0$이므로 $\sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$에서

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|=a_1+a_2+\cdots+a_8+42$

$-a_5-a_6-a_7-a_8=a_5+a_6+a_7+a_8+42$

$2(a_5+a_6+a_7+a_8)=-42$, $a_5+a_6+a_7+a_8=-21$

$(a_6-d)+a_6+(a_6+d)+(a_6+2d)=-21$

$(-2-d)+(-2)+(-2+d)+(-2+2d)=-21$

$2d-8=-21$, $2d=-13$ $\quad\therefore d=-\frac{13}{2}$

그런데 d는 음의 정수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5\geq0$일 때,

5 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이고 6 이상의 자연수 n에

대하여 $a_n<0$이므로 $\sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$에서

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|=a_1+a_2+\cdots+a_8+42$

$-a_6-a_7-a_8=a_6+a_7+a_8+42$, $2(a_6+a_7+a_8)=-42$

$a_6+a_7+a_8=-21$, $a_6+(a_6+d)+(a_6+2d)=-21$

$(-2)+(-2+d)+(-2+2d)=-21$, $3d-6=-21$

$3d=-15$ $\quad\therefore d=-5$

(i), (ii)에 의하여 $d=-5$이고

$a_1=a_6-5d=-2-5\times(-5)=23$이므로

$a_6=a_1+5d$에서 $a_1=a_6-5d$

$a_n=23+(n-1)\times(-5)=-5n+28$

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$야.

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(-5k+28)$$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이고 상수 c에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}c=cn$이야.

$$=-5\times\frac{8\times9}{2}+28\times8$$
$$=-180+224=44$$

12 정답 ⑤ *정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소 [정답률 62%]

(**정답 공식**: 실수 전체의 범위에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$이다.)

1st $g'(x)$를 구해.

$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-4}^{x}f(t)dt=f(x)$

$F'(x)=f(x)$라 할 때, 실수 a에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=f(x)$가 성립해.

2nd 도함수의 성질을 이용해서 $g(2)$가 극솟값이면 $g'(2)=0$임을 이용해.

$g'(2)=f(2)=6+a=0$

따라서 $a=-6$

$a=-6$이면 $f(x)=\begin{cases}3x^2+3x-6 & (x<0)\\ 3x-6 & (x\geq0)\end{cases}$이야.

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 $x=2$를 기준으로 함숫값이 음의 값에서 양의 값으로 바뀐다는 것을 알 수 있어. 그럼 이 그래프를 도함수로 갖는 함수 $y=g(x)$는 $x=2$를 기준으로 감소에서 증가로 바뀌니 $x=2$에서 극솟값을 갖는다고 할 수 있어.

3rd $g(\alpha)$의 값이 극댓값이면 $g'(\alpha)=0$임을 이용해.

$x<0$일 때, 방정식 $3x^2+3x-6=0$을 풀면

$3(x+2)(x-1)=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

그런데 $x<0$이 되어야 하므로 $x=-2$이고

$\alpha=-2$가 되어야 한다.

그러므로 $x=-2$일 때 극댓값을 갖는다.

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}f(t)dt$$
$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-4}^{-2}$$
$$=(-8+6+12)-(-64+24+24)=10+16=26$$

2nd 코사인함수의 그래프를 이용하여 x의 값을 구해.

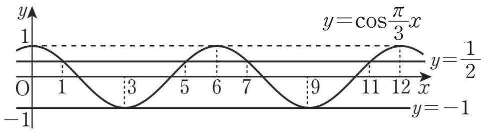
함수 $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이고,

함수 $y=\cos ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$야.

$0\le x<6$에서 $g(1)=g(5)=\frac{1}{2}$, $g(3)=-1$이다.

$\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$이므로 $g(1)=g(5)=\frac{1}{2}$이고

$\cos\pi=-1$이므로 $g(3)=-1$이야.



즉, $6\le x<12$에서 $g(7)=g(11)=\frac{1}{2}$, $g(9)=-1$이다.

함수 $g(x)$의 주기가 6이므로 $g(x)=g(x+6)$이 성립하지?
즉, $g(1)=g(1+6)=g(7)$, $g(3)=g(3+6)=g(9)$,
$g(5)=g(5+6)=g(11)$이야.

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$1+3+5+7+9+11=36$

21 정답 13 *로그함수와 지수함수의 그래프 사이의 관계 [정답률 42%]

(정답 공식: 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이다.)

1st 두 곡선을 평행이동하여 생각해.

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점 $C\left(k, \frac{19}{2}\right)$라 할 때,

점 C는 선분 AB의 중점이다.

이때, 두 곡선 $y=a^x+2$, $y=\log_a x+2$를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계지?
즉, 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이야.

두 점 A, B를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 점 A′, B′도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 C를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 $C'\left(k, \frac{15}{2}\right)$가

선분 A′B′의 중점이므로 점 C′은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore k=\frac{15}{2}$

2nd 점 A′의 좌표를 이용하여 a^2의 값을 구해.

넓이가 $\frac{121}{2}\pi$인 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\pi r^2=\frac{121}{2}\pi$에서 $r^2=\frac{121}{2}$

$\therefore r=\sqrt{\frac{121}{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{A'C'}=r=\frac{11\sqrt{2}}{2}$

한편, 직선 A′B′의 기울기가 -1이므로 점 A′을 지나고 x축에 수직인 직선과

점 C′을 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 H라 하면

삼각형 A′HC′은 직각이등변삼각형이다.

이때, $\overline{A'C'}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$이므로 $\overline{A'H}=\overline{C'H}=\frac{11}{2}$

삼각형 A′HC′은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{A'H}:\overline{C'H}:\overline{A'C'}=1:1:\sqrt{2}$야.
즉, $\overline{A'H}=\overline{C'H}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{A'C'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{11}{2}\sqrt{2}=\frac{11}{2}$이야.

따라서 점 A′는 점 C′을 x축의 방향으로 $-\frac{11}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{11}{2}$만큼

평행이동한 점이다.

따라서 점 A′의 좌표는 $\left(\frac{15}{2}-\frac{11}{2}, \frac{15}{2}+\frac{11}{2}\right)$

즉, $(2, 13)$이고 점 A′이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$x=2$, $y=13$을 대입하면 $a^2=13$

22 정답 2 *함수의 유추 [정답률 17%]

(정답 공식: 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$)

단서1 절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그리는 방법을 이용할 수 있어.
단서2 길이가 2인 구간에서의 최댓값은 구간 내에서 함수의 증감에 관련이 있어.

함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) (4점)

단서3 미분가능하지 않은 그래프의 특징을 이용할 수 있어.

단서+발상

단서1 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$은 함수 $y=|x|$에 함수 $y=x^3-3x+8$를 합성한 함수이므로 함수 $y=x^3-3x+8$의 그래프를 그린 뒤 x축 위쪽으로 접어 올려 그래프를 그릴 수 있다. 발상

단서2 닫힌구간 내에서 연속함수 $f(x)$의 최댓값은 구간의 양 끝 값들과 구간 내의 함수 $f(x)$의 극값 중 가장 큰 값이다. 개념

단서3 $f(x)$의 식이 확정된 상태이므로 함수 $f(x)$의 그래프를 그린 뒤 함수 $g(t)$의 우미분계수와 좌미분계수를 구해 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 두 점을 찾으면 된다. 해결

[문제 풀이 순서]

1st 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 생각해봐.

함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$에 대하여 $h(x)=x^3-3x+8$이라 하면 $f(x)=|h(x)|$

$h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로

$x=-1$일 때, 극댓값 $f(-1)=-1+3+8=10$을 갖고,

$x=1$일 때, 극솟값 $f(1)=1-3+8=6$을 갖는다.

극솟값이 양수이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프도 x축과 한 점에서 만나.

2nd t의 구간을 나누어 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$를 구해.

즉, 방정식 $h(x)=0$은 한 개의 실근 $x=a$를 갖고,

$f(x)=\begin{cases}-h(x) & (x<a)\\ h(x) & (x\ge a)\end{cases}$이다.

방정식 $f(t)=f(t+2)$의 해를 구하자.

닫힌구간 $[t, t+2]$의 양 끝에서의 함숫값이 같을 때의 t의 값

$a-2<t<a$일 때, $f(t)=f(t+2)$에서 $-h(t)=h(t+2)$

$a<t+2<a+2$

$-(t^3-3t+8)=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$2(t^3+3t^2+3t+9)=2(t+3)(t^2+3)=0$에서 $t=-3$

$t\le a-2$ 또는 $t\ge a$일 때, $f(t)=f(t+2)$에서

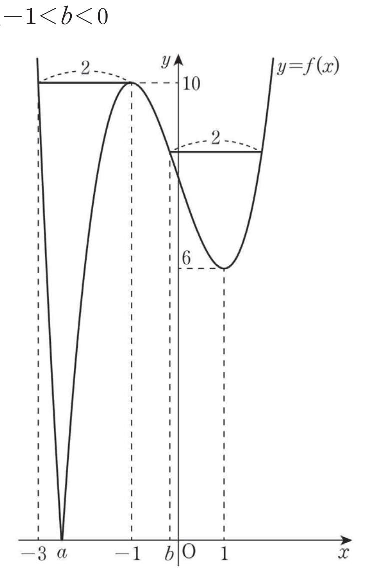
$h(t)=h(t+2)$

$t<t+2\le a$ 또는 $t+2>t\ge a$

$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$2(3t^2+6t+1)=0$에서 $t=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

$-1+\frac{\sqrt{6}}{3}=b$라 하면 $-1<b<0$



$t<-3$일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값은 $f(t)$이므로

$g(t)=f(t)=-h(t)$ … ㉠

$f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 했어.

$-3\le t\le -1$일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값은

$f(-1)=h(-1)=-1+3+8=10$이므로 $g(t)=10$ … ㉡

$-1<t\le b$일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의

최댓값은 $f(t)$이므로 $g(t)=f(t)=h(t)$ … ㉢

$b<t$일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값은 $f(t+2)$이므로

$g(t)=f(t+2)=h(t+2)$ … ㉣

3rd 미분불가능한 두 점 $t=\alpha$와 $t=\beta$를 구해.

또한, $\lim_{t\to -3-}g(t)=10=g(-3)=\lim_{t\to -3+}g(t)$

$\lim_{t\to -1-}g(t)=10=g(-1)=\lim_{t\to -1+}g(t)$, $\lim_{t\to b-}g(t)=g(b)=\lim_{t\to b+}g(t)$

이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{t\to -3-}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=\lim_{t\to -3-}\frac{-h(t)-10}{t+3}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=\lim_{t\to -3-}\frac{-t^3+3t-18}{t+3}$

$=\lim_{t\to -3-}\frac{(t+3)(-t^2+3t-6)}{t+3}$

$=\lim_{t\to -3-}(-t^2+3t-6)=-9-9-6=-24$

$\lim_{t\to -3+}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=\lim_{t\to -3+}\frac{10-10}{t+3}$ ($\because$ ㉡)$=0$

이므로 $g(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.

같은 방법으로 구하면

$$\lim_{t\to-1-}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=0(\because ㉡)$$

$$\lim_{t\to-1+}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}$$

$$=\lim_{t\to-1+}(t^2-t-2)=0\ (\because ㉡, ㉢)$$

이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하고

$$\lim_{t\to b-}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}$$

$$=\lim_{t\to b-}(t^2+bt+b^2-3)=3b^2-3\ (\because ㉢)$$

$$\lim_{t\to b+}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}$$

$$=\lim_{t\to b+}\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}\ (\because ㉢, ㉣)$$

$$=3b^2+12b+9$$

에서 $3b^2-3=3b^2+12b+9$인 $b=-1$이므로 모순이다.

즉, $g(t)$는 $t=b$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=b=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$$\alpha\beta=-3\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=3-\sqrt{6}$$

$m=3$, $n=-1$이므로

$m+n=3-1=2$

My Top Secret 서울대 선배의 ❶ 등급 대비 전략

$g(t)$는 구간의 양 끝 값인 $f(t)$, $f(t+2)$와 구간 내의 함수 $f(x)$의 극값 중 가장 큰 값으로 구할 수 있으므로 눈여겨봐야 할 곳은 $f(t)=f(t+2)$인 곳과 함수 $f(x)$의 극값이야. 해당 점들을 기준으로 그 주변을 살펴본다면 함수 $g(t)$의 그래프가 어떻게 그려지고, 어디서 미분가능하지 않은지 찾을 수 있어.

선택과목: 확률과 통계

23 정답 ① *중복조합의 수 [정답률 91%]

(정답 공식: 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.)

1st 중복조합의 수를 구해.

$${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

[조합의 성질] ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

24 정답 ⑤ *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 85%]

(정답 공식: 네 자리 자연수가 홀수가 되려면 일의 자리의 수가 홀수이어야 한다.)

1st 홀수가 되어야 하므로 일의 자리가 홀수인 모든 경우를 생각해야 해.

일의 자리에는 1, 2, 3 중에 홀수인 1 또는 3이 올 수 있다.

따라서 일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수는 2이다.

2nd 나머지 세 자리에 올 수의 경우의 수를 구해.

일의 자리를 제외한 나머지 세 자리의 수는 1, 2, 3 중에 중복을 허락하여 선택할 수 있으므로 그 방법의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

[중복순열의 수] ${}_n\Pi_r=n^r$

따라서 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는

$2\times27=54$

25 정답 ② *원순열 [정답률 85%]

(정답 공식: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.)

1st 여학생 2명을 한 사람으로 보고 원순열의 수를 구해.

여학생 2명을 한 사람으로 보면 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

이때, 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가

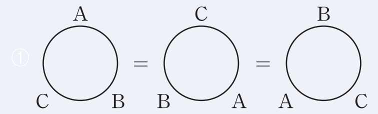
$2!=2$이므로 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

수능 핵강

*** 원순열의 이해**

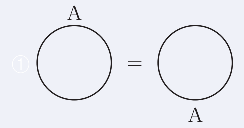
① A, B, C 세 명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이야.
그런데 원 모양의 탁자에 둘러앉게 되면



이렇게 3가지씩 같은 경우가 생기기 때문에 3으로 나눠줘야 해.

따라서 3명의 원순열은 $\frac{3!}{3}=2!$이 되는 거지.

② A, B, C 세 명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 데 가장 먼저 한 명이 자리를 잡는 경우의 수는 1이 되겠지?
왜냐하면 그 한 명이 어디에 앉아도 회전하면 같은 경우이기 때문이야.

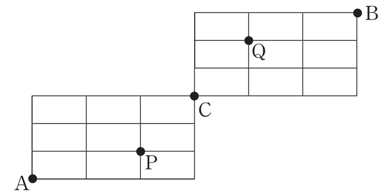


한 명이 자리에 앉았다면 이제 더 이상 나머지 두 명의 배열은 원순열이 아닌 순열이 되는 거야.
따라서 3명의 원순열은 $1\times2!$으로 이해할 수도 있어.

26 정답 ④ *도로망에서 최단 경로 [정답률 68%]

(정답 공식: A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점으로 갈 때의 경우에서 P 지점과 Q 지점을 모두 지나는 경우를 제외하여 경우의 수를 구한다.)

1st 그림과 같이 C 지점을 잡고 A에서 출발하여 P를 지나 C까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구해.



오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하면

A에서 P까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!\times1!}=3$

[같은 것이 있는 순열] n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

P에서 C까지 최단거리로 가는 경우의 수는 위와 마찬가지로 $\frac{3!}{2!\times1!}=3$

따라서 A에서 출발하여 P를 지나 C까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$

두 사건이 동시에 일어나야 하니까 곱의 법칙에 의해 두 경우를 곱한 거야.

2nd C 지점에서 B까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구해.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하면

C에서 B까지 최단거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{3!\times3!}=20$$

3rd C에서 B까지 가는 경우의 수에서 Q를 지나는 경우의 수를 구한 후 문제의 경우의 수를 구해.

C에서 출발하여 Q를 지나 B까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$이므로 C에서 출발하여 Q를 지나지 않고 B까지 가는 경우의 수는

C에서 Q까지 최단거리로 가는 경우의 수 3과 Q에서 B까지 최단거리로 가는 경우의 수 3을 곱한 거야.

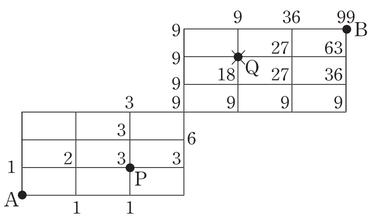
$20-9=11$

따라서 구하는 경우의 수는 $9\times11=99$

[곱의 법칙] 잇달아 일어나는 두 사건에 대하여 각각의 경우의 수를 곱해.

쉬운 풀이: 경로의 합을 이용하여 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않고 B 지점까지 가는 경로의 수 구하기

그림과 같이 경로의 합을 이용하여 구할 수 있어.



A 지점에서 출발하여 P 지점까지 가는 경우의 수는 P의 왼쪽에서 오는 경우의 수인 2와 P의 아래쪽에서 오는 경우의 수인 1을 더하여 3이야.
Q 지점은 지나지 않아야 하므로 Q를 지나는 경우를 제외한 경우의 수를 더해서 구해.

따라서 최단거리로 가는 방법의 수를 구하면 99야.

조건 (나)를 만족하려면 초콜릿을 받지 못한 학생에게 사탕을 2개, 초콜릿을 1개 받은 학생에게 사탕을 1개 나누어 주어야 한다.
이때, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

같은 종류의 사탕 2개를 A, B, C 세 명에게 나누어 주는데 A가 2개를 모두 받은 경우를 AA, B가 1개, C가 1개를 받는 경우를 BC라고 생각해 보면, 같은 종류의 사탕이므로 BC와 CB는 같아. 따라서 A, B, C 세 명에서 사탕 2개를 중복을 허락하여 선택하는 중복조합의 경우와 같아.

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $18\times6=108$

2nd 두 명의 학생이 초콜릿을 받지 못한 경우의 수를 구해.

세 명의 학생 A, B, C 중에 초콜릿을 받지 못하는 2명의 학생을 선택하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

조건 (나)를 만족하려면 초콜릿을 받지 못한 두 명의 학생에게 사탕을 2개씩 나누어 주어야 한다. 남은 1개의 사탕을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times3=9$

3rd 전체 경우의 수를 구해.

즉, 구하는 전체 경우의 수는

$108+9=117$

My Top Secret 서울대 선배의 1등급 대비 전략

서로 다른 종류의 대상과 같은 종류의 대상이 모두 제시되었을 때, 가능한 경우를 명확히 하기 위해 서로 다른 대상을 기준으로 나누는 것이 좋아. 특히, 이 문제에서는 주어진 2개의 조건인 (가), (나) 모두 초콜릿을 언급하고 있으므로 이를 기준으로 먼저 경우를 나눈 후 조건 (나)를 만족시키도록 사탕을 배치하면 구해야 하는 경우의 수를 헷갈리지 않고 확실하게 구할 수 있어.

30 정답 90 *순열과 조합을 이용한 함수의 개수 [정답률 9%]

정답 공식: $n(X)=m$, $n(Y)=n$일 때, 함수 $f: X\longrightarrow Y$ 중에서 임의의 $x_1, x_2\in X$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_m$

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\longrightarrow X$의 개수를 구하시오. (4점)

(가) $f(1)\le f(2)\le f(3)$

(나) $1<f(5)<f(4)$

단서1 $f(5)$는 1보다 커야 하고 $f(5)<f(4)$이므로 $f(5)$는 5가 될 수 없어. $f(5)=2$, $f(5)=3$, $f(5)=4$인 경우로 나누어 생각해 보자.

(다) $f(a)=b$, $f(b)=a$를 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

단서2 만약 $f(1)=2$, $f(2)=1$이면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 1, 2, 3끼리는 a, b가 될 수 없어.

단서+발상

단서1 조건 (나)에 의해 $f(5)$로 가능한 값은 2, 3, 4로 다른 함숫값들에 비해 상대적으로 가능한 경우가 적다. 따라서 이를 기준으로 경우를 나눈 뒤 나머지 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다. (발상)

단서2 서로 다른 두 원소 a, $b(a<b)$가 $f(a)=b$, $f(b)=a$를 만족하면 $f(a)>f(b)$이므로 조건 (가)에 의하여 1, 2, 3끼리는 a, b가 될 수 없음을 알 수 있다. (적용)
1, 2, 3끼리의 경우가 아닐 때는 조건 (다)를 확인하여 가능한 경우의 수를 찾고 함수의 개수를 구할 수 있다. (해결)

[문제 풀이 순서]

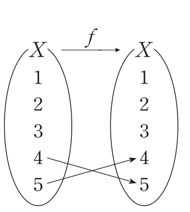
1st $f(5)$가 될 수 있는 경우를 확인해.

조건 (나)에서 $1<f(5)<f(4)$이므로 $f(5)$는 2 또는 3 또는 4가 될 수 있다.

2nd $f(5)$가 될 수 있는 각각의 경우에 대한 경우의 수를 구해.

(i) $f(5)=4$일 때,

조건 (나)에서 $1<f(5)<f(4)$이므로 $f(4)=5$이다.
이때, 조건 (다)를 만족시킨다.



조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

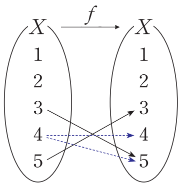
$f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족하려면 공역의 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택하고 $f(1)\le f(2)\le f(3)$의 순서로 대응시키면 되므로 중복조합으로 계산할 수 있어.

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

(ii) $f(5)=3$일 때,

조건 (나)에 의해 $f(4)=4$ 또는 $f(4)=5$



조건 (다)를 만족시키기 위해서는 $f(3)=5$이어야 한다.

만약 조건 (다)를 만족시키는 a, b가 1, 2라면 $f(1)=2$, $f(2)=1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않아. 이러한 이유로 1, 2, 3끼리는 조건 (다)의 a, b가 될 수 없어.

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5 중에 중복을 허락하여 2개 고르는 경우

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

즉, 경우의 수는 $2\times15=30$

$f(4)=4$ 또는 $f(4)=5$가 가능하므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 2야.

(iii) $f(5)=2$일 때,

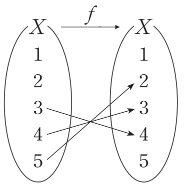
조건 (나)에 의해 $f(4)=3$ 또는 $f(4)=4$ 또는 $f(4)=5$

i) $f(4)=3$일 때,

조건 (다)를 만족시키는 a, b가 3, 4이거나 2, 5가 될 수 있다.

이 경우 $f(3)=4$야. 이 경우 $f(2)=5$야.

① $f(3)=4$인 경우

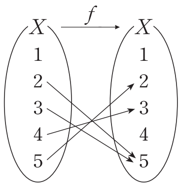


조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 2, 3, 4 중에 중복을 허락하여 2개 고르는 경우

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

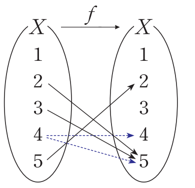
② $f(2)=5$인 경우



조건 (가)에 따라 $f(3)=5$이고 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5

1, 2, 3, 4, 5 중에 1개 고르는 경우

ii) $f(4)=4$ 또는 $f(4)=5$일 때,



조건 (다)를 만족시키기 위해서는 $f(2)=5$이어야 하고
조건 (가)에 의해 $f(3)=5$
$f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5이므로
$f(4)=4$ 또는 $f(4)=5$일 때의 경우의 수는

$2\times5=10$

$f(4)$를 정하는 경우의 수

i), ii)에 의하여 $f(5)=2$일 때의 경우의 수는

$10+5+10=25$

3rd 함수의 개수를 구해.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$35+30+25=90$

My Top Secret 서울대 선배의 1등급 대비 전략

조건 (가)에 의하여 1, 2, 3끼리는 a, b가 될 수 없는데, 조건 (나)에 의하여 $f(5)>1$, $f(4)>2$이므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 조합은 (3, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5)뿐임을 알 수 있어.
따라서 위의 해설처럼 $f(5)$의 값을 기준으로 경우를 나누지 않고 해당 조합을 기준으로 경우를 나누어 함수의 개수를 구할 수도 있어.

선택과목: 미적분

23 정답 ① *등비수열의 극한값의 계산 [정답률 93%]

정답 공식: $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.

1st 지수식의 분모의 밑의 절댓값이 1 이하가 되도록 분모, 분자를 각각 같은 수로 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{3^n}+\dfrac{3^{n-1}}{3^n}}{\dfrac{2^n}{3^n}-\dfrac{3^n}{3^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1}$$

모든 밑이 1 이하가 되도록 분모, 분자를 각각 3^n으로 나눠.

$$=\frac{2\times0+\dfrac{1}{3}}{0-1}=-\frac{1}{3}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$임을 이용해.

24 정답 ③ *수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: 주어진 식을 변형해서 na_n, $\frac{b_n}{n}$ 꼴로 나타낸다.)

1st 극한값을 계산해.

$\lim_{n\to\infty} na_n=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$이므로 분자와 분모를 각각 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2b_n}{n}}$$

분모, 분자를 각각 n으로 나눴어.

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(na_n+\frac{b_n}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2b_n}{n}\right)}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$)

$$=\frac{1+3}{0+2\times 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$\frac{\lim_{n\to\infty}\left(na_n+\frac{b_n}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2b_n}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty} na_n+\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}}=\frac{1+3}{0+2\times 3}$
이 성립해. $\lim_{n\to\infty} na_n=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$으로 두 극한값이 각각 수렴한다고 주어졌으므로 성립하는 거야.

25 정답 ⑤ *수열의 극한의 대소 관계 [정답률 91%]

(정답 공식: $a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty} b_n$를 이용한다.)

1st $\frac{a_n}{n}$의 극한값을 구해.

$2n+3<a_n<2n+4$에서 각 변을 n으로 나누면

$$\frac{2n+3}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+4}{n}$$

n은 자연수 즉, 양수이므로 n으로 나누어도 부등호 방향이 바뀌지 않아.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}=2$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$ ⋯ ㉠

$a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립해.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}$이므로
$2\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le 2$가 돼서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$를 알 수 있는 거야.

2nd 극한값을 구해.

주어진 식의 분모, 분자를 각각 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)^2+6}{\frac{a_n}{n}}$$

주의 분모, 분자를 각각 n^2으로 나누면 분모도 $\frac{a_n}{n}$만 남아 ㉠을 이용할 수 있고 분자도 완전제곱식으로 정리될 때, n^2이 n이 되어 $\frac{a_n}{n}$ 꼴이 되므로 ㉠을 이용할 수 있어. 그러니 분모, 분자를 각각 n^2으로 나눈 거야.

$$=\frac{(2+0)^2+6}{2}\ (\because ㉠)=5$$

26 정답 ④ *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 83%]

(정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어서 극한값을 구한다.)

1st a_n의 일반항을 구해.

$a_{n+1}-a_n=a_1+2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 (a_1+2)인 등차수열이다.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)\times(a_1+2)=(a_1+2)n-2$ ⋯ ㉠

2nd 주어진 극한값을 통해 a_{10}의 값을 구해.

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$야.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}$에 ㉠을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\{(a_1+2)n-2\}+n}{(a_1+2)n-2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_1+5)n-4}{(a_1+1)n-1}$$

분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 계산해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+5-\frac{4}{n}}{a_1+1-\frac{1}{n}}=\frac{2a_1+5}{a_1+1}=3$$

$2a_1+5=3(a_1+1)$, $2a_1+5=3a_1+3$ $\therefore a_1=2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=(2+2)n-2=4n-2$ ($\because$ ㉠)이므로

$a_{10}=4\times 10-2=38$

27 정답 ② *a_n과 S_n의 관계를 이용한 수열의 극한 [정답률 70%]

(정답 공식: 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$이다.)

1st 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구해.

등차수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$, $a_2=6$이고 공차는 $6-3=3$이므로 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$

2nd 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구해.

수열 $\{a_n(b_n)^2\}$은

$n=1$일 때,

$a_1(b_1)^2=\sum_{k=1}^{1}a_k(b_k)^2=1^3-1+3=3$

이고 $a_1=3$이므로 $b_1=1$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $(b_1)^2=1$에서 $b_1=1$이야.

$n\ge 2$일 때,

$a_n(b_n)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k(b_k)^2-\sum_{k=1}^{n-1}a_k(b_k)^2$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$이야.

$=(n^3-n+3)-\{(n-1)^3-(n-1)+3\}$

$=3n^2-3n=3n(n-1)$

이고, $a_n=3n$이므로 $(b_n)^2=n-1$

양변을 a_n으로 나누면 $(b_n)^2=\frac{3n(n-1)}{3n}=n-1$이야.

$\therefore b_n=\sqrt{n-1}$ ($\because b_n>0$)

3rd $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_nb_{2n}}$의 값을 구해.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_nb_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n-1}\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{2n^2-3n+1}}$$

분모, 분자의 최고차항의 차수가 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 최고차항의 계수의 비를 구해.

주의 분모, 분자를 각각 n으로 나누면 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

28 정답 ③ *좌표평면에서 도형의 넓이에 대한 극한 [정답률 46%]

(정답 공식: 삼각형의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표를 n으로 표현하여 S_n을 n에 관한 식으로 표현한다.)

1st 두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각 구해.

$y=2nx$와 $y=x^2+n^2-1$을 연립해보면

$x^2+n^2-1=2nx$이므로 $x^2-2nx+n^2-1=0$

이 식을 인수분해하면

$x^2-2nx+(n+1)(n-1)=0$

$(x-n-1)(x-n+1)=0$이므로

$x=n+1$ 또는 $n-1$이다.

두 점 A_n, B_n의 x좌표가 $n+1$과 $n-1$이야.
(i) 점 A_n의 x좌표가 $n-1$이고 점 B_n의 x좌표가 $n+1$일 때와
(ii) 점 A_n의 x좌표가 $n+1$이고 점 B_n의 x좌표가 $n-1$일 때
삼각형 A_nB_nP의 넓이는 동일하므로 점 A_n의 x좌표가 $n-1$이고 점 B_n의 x좌표가 $n+1$로 두고 풀거야.

$A_n(n-1,\ 2n^2-2n)$, $B_n(n+1,\ 2n^2+2n)$이라 하면

$\overline{A_nB_n}=\sqrt{\{(n-1)-(n+1)\}^2+\{(2n^2-2n)-(2n^2+2n)\}^2}$

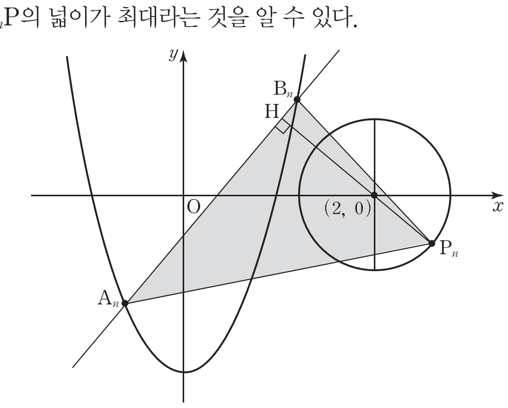
$=\sqrt{2^2+(4n)^2}$

$=\sqrt{16n^2+4}=2\sqrt{4n^2+1}$ ⋯ ㉠

2nd 삼각형 A_nB_nP의 넓이의 최댓값을 구해.

삼각형 A_nB_nP의 넓이는 밑변을 선분 A_nB_n으로 두면 높이는 점 P에서 직선 A_nB_n까지의 거리로 구할 수 있다.

이때, 밑변의 길이는 고정되어 있으므로 높이가 최대일 때 삼각형 A_nB_nP의 넓이가 최대라는 것을 알 수 있다.



원의 중심 $(2,\ 0)$에서 직선 A_nB_n에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심과 점 H를 지나는 직선이 원과 만나는 두 점 중 점 H와 더 멀리 떨어진 점을 P라 하면 이때의 삼각형 A_nB_nP의 높이가 최대가 된다.

$\therefore P=P_n$

(ii) $g(m)\geq g(m+1)$일 때,

조건 (다)에서 $g(l)\geq g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l은

m, $m+1$, $m+2$이므로

$\alpha=m+2$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)$

$\quad=(x-m-2)(x-m-3)(x-\beta)$ ⋯ ㉡

$\quad=\{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}(x-\beta)$

이므로

$f'(x)=(2x-2m-5)(x-\beta)+\{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}$

$\quad=-5(m-\beta)+6$

에서 $f'(m)=1$이므로

$-5(m-\beta)+6=1$, $m-\beta=1$

$m=f(m)=6(m-\beta)$ ($\because$ ㉡)$=6\times1=6$일 때,

㉡에 $x=m$을 대입하면
$f(m)=(m-m-2)\times(m-m-3)\times(m-\beta)$
$\quad=6(m-\beta)$

$\beta=5$, $\alpha=8$이므로

$f(x)=(x-8)(x-9)(x-5)$이다.

이때, $g'(m+1)=f'(m+1)=-4$이므로 조건 (가)를 만족시키고,

$g'(m+1)\leq0$을 만족시켜야 해.

$g(m)=f(m)\geq f(m+1)=g(m+1)$이다.

$x=m$에서 연속이고, (다)를 만족시켜야 해.

4th $g(12)$의 값을 구해.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x-8)(x-9)(x-5)$이므로

$g(12)=f(12)$

$\quad=4\times3\times7=84$

My Top Secret 서울대 선배의 ❶등급 대비 전략

부등식과 정수 조건만으로 문제를 끌어가는 형식이 까다로울 때가 많은데, 각각의 조건을 연결해서 생각하면 돌파구를 찾을 수도 있어.
이 문제의 경우에도 조건 (나)를 통해 방정식 $f(x)=0$의 해의 위치를 대략적으로 찾아낸 뒤 조건 (가)로부터 얻어낸 $g(m)=m$, $g'(m)=1$, $g'(m+1)\leq0$과 조건 (다), 자연수 조건을 이용하여 $g(12)$의 값을 구할 수 있어.

선택과목: 기하

23 정답 ③ ＊타원의 초점과 단축, 장축 [정답률 92%]

정답 공식: 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$의 의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$이다.

1st 타원의 정의를 이용하여 두 초점의 좌표를 구해.

타원 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)(c>0)$이라 하면

$c^2=17-8=9$에서 $c=3$이므로

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$의 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$이지.

두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-3, 0)$이다.

따라서 두 초점 사이의 거리는 6이다.

두 초점이 모두 x축 위에 있으므로
두 초점 사이의 거리는 두 초점의 x좌표의 값의 차로 구할 수 있어.
즉, 두 초점 사이의 거리는 $|3-(-3)|=6$이야.

24 정답 ② ＊포물선의 정의 및 방정식 [정답률 91%]

정답 공식: 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P와 초점 $\mathrm{F}(p, 0)$ 사이의 거리는 준선 $x=-p$까지의 거리와 같다.

1st 포물선의 정의를 이용하여 점 P의 x좌표를 구해.

포물선 $y^2=20x$의 준선의 방정식은 $x=-5$이다.

포물선 $y^2=20x$의 초점의 좌표를 $(p, 0)$이라 하면
$4p=20$에서 $p=5$이므로 초점의 좌표는 $(5, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-5$야.

점 P에서 준선 $x=-5$에 내린 수선의 발을 H라 하고,

점 P의 x좌표를 t라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=t+5$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$15=t+5$

$\therefore t=10$

따라서 점 P의 x좌표는 10이다.

25 정답 ⑤ ＊쌍곡선의 초점과 주축의 길이 [정답률 76%]

정답 공식: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이다.

1st 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$이라 두고 쌍곡선의 성질을 이용하여 a와 b의 비를 구해.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$이라 두면

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

그러므로 $a=4k$, $b=3k$ $(k>0)$ ⋯ ㉠라 둘 수 있다.

2nd 쌍곡선의 초점의 좌표를 구하고 k의 값을 구해.

쌍곡선의 두 초점 사이의 거리가 30이므로

쌍곡선의 두 초점의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)(c>0)$이라 두면 $2c=30$에서 $c=15$가 돼.

초점의 좌표는 각각 $(15, 0)$, $(-15, 0)$

$15^2=a^2+b^2$에서 $15^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2$ ($\because$ ㉠)이므로

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>a>0)$이라고 하면 $c^2=a^2+b^2$이야.

$k^2=9 \qquad \therefore k=3$ ($\because k>0$)

$a=4k=12$ ($\because$ ㉠)이므로 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=24$

26 정답 ④ ＊포물선의 정의와 방정식의 활용 [정답률 55%]

정답 공식: 포물선 $y^2=4px$가 x축과 y축의 방향으로 평행이동을 해도 초점과 준선 사이의 거리는 변하지 않는다.

1st 포물선 C의 초점의 x좌표를 구해.

$(y-a+1)^2=(a+b)x+1$에서

$(y-a+1)^2=4\left(\frac{a+b}{4}\right)\left(x+\frac{1}{a+b}\right)$이므로

포물선 C의 초점의 x좌표는 $\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}$이고

포물선 $y^2=4\left(\frac{a+b}{4}\right)x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{4}, 0\right)$인데 x축의 방향으로 $-\frac{1}{a+b}$만큼 평행이동하므로 포물선 C의 초점의 x좌표는 $\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}$이야.

준선의 방정식은 $x=-\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}$이다.

포물선 $y^2=4\left(\frac{a+b}{4}\right)x$의 준선의 방정식은 $x=-\frac{a+b}{4}$인데 x축의 방향으로 $-\frac{1}{a+b}$만큼 평행이동하므로 준선의 방정식은 $x=-\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}$이야.

이때, 포물선 C의 초점과 준선 사이의 거리가 2이므로

$\left|\left(\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}\right)-\left(-\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}\right)\right|=\left|\frac{a+b}{4}-\left(-\frac{a+b}{4}\right)\right|=2$

포물선 C의 준선이 y축과 평행한 직선이므로 초점의 x좌표와 준선의 방정식 위의 x값의 차이야.

$\left|\frac{a+b}{2}\right|=2$

$\therefore |a+b|=4$

2nd 포물선 C가 원점을 지나도록 하는 a와 b의 값을 구해.

포물선 C가 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$(a-1)^2=1$이므로 $a=0$ 또는 $a=2$

$|a+b|=4$임을 이용하면

(i) $a=0$인 경우 $|b|=4$

$\quad\therefore b=4$ 또는 $b=-4$

(ii) $a=2$인 경우 $|b+2|=4$

$\quad b+2=4$ 또는 $b+2=-4$

$\quad\therefore b=2$ 또는 $b=-6$

(i), (ii)에 의해 $a-b$로 가능한 값은 -4, 4, 0, 8이다.

즉, 최댓값 $M=8$, 최솟값 $m=-4$

$\therefore M-m=8-(-4)=12$

다른 풀이 : 포물선의 평행이동을 이용하기

포물선을 평행이동하면 준선과 초점도 똑같이 평행이동하므로

포물선 C의 초점과 준선 사이의 거리가 2이면 꼭짓점이 원점이 되도록 평행이동한 $y^2=(a+b)x$의 초점과 준선 사이의 거리도 2야.

이 포물선의 초점은 $\left(\frac{a+b}{4}, 0\right)$이고 준선은 $x=-\frac{a+b}{4}$이므로 거리는

$\left|\frac{a+b}{4}-\left(-\frac{a+b}{4}\right)\right|=2$야.

(이하 동일)