

고등학교 수학, 개념을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고 공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.

개념을 꼼꼼히 분류하고 그 개념에 맞는 단계화된 문제를 통해서
각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 최신 학교시험과 학력평가 문제를 철저히 분석해
세밀하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는 실전 유형 훈련으로
고등 수학 실력을 탄탄하게 올릴 수 있게 만들었습니다.
그래서 어떤 신유형 문제가 출제되어도 쉽게 해결할 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 꼼꼼한 분석 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 바르게 풀어가면서 동시에 핵심 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있도록 도와줍니다.

특별한 사람만이 수학을 좋아하고 잘하는 것이 아닙니다.
개념을 바르게 이해하고, 쉬운 문제부터 단계를 밟아 기본을 다지면
수학은 어느새 재미있고 즐거운 과목이 되어 있을 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -



학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [30일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜		복습 날짜	
1	A 01~59		월	일	월	일
2	60~107		월	일	월	일
3	108~150		월	일	월	일
4	151~182		월	일	월	일
5	183~205		월	일	월	일
6	B 01~53		월	일	월	일
7	54~106		월	일	월	일
8	107~154		월	일	월	일
9	155~185		월	일	월	일
10	C 01~52		월	일	월	일
11	53~100		월	일	월	일
12	101~155		월	일	월	일
13	156~188		월	일	월	일
14	D 01~52		월	일	월	일
15	53~98		월	일	월	일
16	99~138		월	일	월	일
17	139~159		월	일	월	일
18	E 01~65		월	일	월	일
19	66~100		월	일	월	일
20	101~118		월	일	월	일
21	F 01~44		월	일	월	일
22	45~63		월	일	월	일
23	64~81		월	일	월	일
24	G 01~49		월	일	월	일
25	50~113		월	일	월	일
26	114~150		월	일	월	일
27	151~171		월	일	월	일
28	모의 A~B		월	일	월	일
29	모의 C~E		월	일	월	일
30	모의 F~G		월	일	월	일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) - 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
 수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
 수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
 명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
배수나 가인아카데미
이종석 제일등급 수학
전경준 서울 풍문고
최대철 서울 인창고

홍지연 부산 피보나치수학
홍지우 안양 평촌고
황광희 경기 시흥고
수경 수학 콘텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]
곽웅수 광주 카르페영수학원
박경희 화성 대치정인학원
이세복 서울 일타수학학원
홍영표 안양 더큰꿈학원
황선아 수원 서나수학

개념&문제 풀이
 강의 선생님
 유튜브 채널



‘수학문제 다깨기’

[감수진]

강마루 이천 이강학원
강명식 수원 맏손수학학원
강수민 부산 강하이수학학원
강은영 서울 탑수학학원
김경자 대전 펜타뷰수학
김대한 인천 학산학원
김도연 구미 그릿수학학원
김리안 인천 수리안학원
김미정 대구 일등수학학원
김민영 군포 상송수학
김민정 창원 스키마수학
김복현 부천 시온고
김봉조 울산 퍼스트클래스 수학영어전문학원
김성환 밀양 밀양고
김수영 대구 봉덕김샘수학학원
김수진 광주 영재서관학원
김연주 서울 목동샘올림수학학원
김용형 세종 QE영어수학학원
김정구 인천 3030영수학원
김정섭 서울 로고스 학원
김정식 용인 게이트학원
김주현 광주 현스카이학원
김주희 인천 탑엘리트영수학원
김 준 인천 쫘에듀학원
김지송 서울 잠신고
김지현 수원 엠코드수학학원
김태성 광주 김태성수학
김해성 거제 AHHAS수학(이하수학)
문정연 광주 풍암의 정석
문정탁 대구 STM수학학원

박경문 전주 해성중
박규진 김포 하이스트 학원
박영언 의정부 멘토학원
박지현 대구 하이클래스수학
백석인 서울 연세학원
백태민 대구 학문당입시학원
변지영 대구 수학을찾는사람들
서동원 대전 수학의 중심학원
손형래 합천 남명학습관
손흥규 고양 꿀수학교습소
심동주 안동 아르베수학전문학원
안대호 김포 독강수학학원
안재현 부산 현수학교습소
안 혁 울산 혁신수학
양우석 서울 강의하는아이들
양윤석 용인 태성고
양지현 성남 일비충천수학학원
어성웅 수원 어쌤수학학원
엄보웅 안산 경안고등학교
유슬기 창원 르네수학교습소
윤희용 부천 매트릭스학원
이경환 대구 학문당입시학원
이민규 인천 투스카이수학학원
이선경 대구 아르케수학학원
이세복 서울 일타수학학원
이승재 대구 척수학교습소
이승훈 인천 일품수학과학전문학원
이원영 고양 FM 수학전문학원
이윤경 서울 윤수학학원
이정섭 서울 은지호영감수학

이주연 울산 반석성균관학원
이준석 서울 로드맵수학학원
이철호 군포 파스칼수학학원
이태권 대구 보담학원
이한빛 고양 한빛수학학원
이화정 안양 마타수학
임안철 안양 에이엠수학학원
임태형 군포 생각하는방법
장시은 용인 자이언트에듀학원
장용준 의정부 상우고
전승환 안양 공돌학원
전지혜 세종 뉴웨이브수학
정종연 부천 정중수학학원
정진탁 대전 심플수학학원
정휘수 부산 제이매쓰수학방
조성철 부천 매트릭스수학학원
차동희 용인 수학전문공감학원
최지영 용인 매쓰플랜
최현성 대전 충남고
한승호 진주 보람과학썬투스수학영재학원
함정훈 압구정 함수학
현승평 화성 화성고
홍재화 서울 티다른수학교습소
황화연 전주 근영여자고

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대운 서울대 수리과학부



차 례 [총 137개 유형 분류]

I 집합과 명제

A 집합 - 28개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	10
내신+학평 유형 스토리	14
서술형 스토리	34
1등급 고난도 스토리	36

B 명제 - 24개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	40
내신+학평 유형 스토리	44
서술형 스토리	64
1등급 고난도 스토리	66
동아리 소개/이화여대 홍작	68

II 함수

C 함수 - 23개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	70
내신+학평 유형 스토리	74
서술형 스토리	94
1등급 고난도 스토리	96

D 유리식과 유리함수 - 21개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	102
내신+학평 유형 스토리	104
서술형 스토리	122
1등급 고난도 스토리	124

E 무리식과 무리함수 - 17개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	128
내신+학평 유형 스토리	130
서술형 스토리	140
1등급 고난도 스토리	142
동아리 소개/성균관대 성균지	144

Ⅲ 순열과 조합

F 경우의 수 - 8개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	146
내신+학평 유형 스토리	148
서술형 스토리	156
1등급 고난도 스토리	158
동아리 소개/포항공대 CHEERO	160

G 순열과 조합 - 16개 유형 분류

개념 스토리 / 개념 확인 문제	162
내신+학평 유형 스토리	166
서술형 스토리	184
1등급 고난도 스토리	186

Special 내신+학평 대비 단원별 모의고사

A 집합	190
B 명제	192
C 함수	194
D 유리식과 유리함수	196
E 무리식과 무리함수	198
F 경우의 수	200
G 순열과 조합	202

빠른 정답 찾기 204

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

‘수학문제 다깨기’





유형별 문제와 1등급 대비 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

1 개념 스토리+개념 확인 문제

수학(하)에서 꼭 알아야 하는 중요한 교과서 개념을 쉽게 이해되도록 설명하였습니다. 또한, 개념과 공식을 확실히 자신의 것으로 만들 수 있는 개념 확인 문제를 함께 수록했습니다.

- **중요도** 🌟🌟🌟: 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **개념 확인 문제**: 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제로 구성

개념 확인 문제

중요도 🌟🌟🌟

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 다항식의 덧셈과 뺄셈: 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 계산한다.

① 괄호가 있는 경우 괄호를 툰다.
② 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

(2) 다항식의 곱셈: 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 전개

※ 지수법칙: m, n 이 자연수일 때

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = a^{m \times n}$

A16 $(2x-5)(3x+2)$

A17 $(x+1)(x+3)(x+6)$

A18 $(x+2)^3$

- **QR 코드**: 수학 전문 강사의 생생한 개념 강의를 통해 완벽한 개념 학습을 할 수 있도록 하였습니다.

3 서술형 스토리 - 단계별 문제해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계적으로 풀어나가는 과정을 제시하여 서술형 문제에 대한 자신감을 얻을 수 있게 구성하였습니다.

★☆☆

☆☆☆

A116 ☆☆☆

유형 06 곱셈 공식의 변형 (1)

$x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 일 때,
 $x^6 + x^3 - y^6 - y^3$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st 주어진 식을 $x+y, xy$ 등이 나오는 식으로 정리해보자.

A118 ☆☆☆

세 다항식
 $A = (x+3y)(x^2-3xy+9y^2), B = x^3-5x+1,$
 $C = 2x^2-5x+27y^2-5$
에 대하여 $2(A+B)-3(C+B)$ 를 간단히 나타내
과정을 서술하시오. (10점)

4 단원별 모의고사 - 내신+학평 대비와 단원 실력 최종 점검

중간, 기말 학교 시험에 대비할 수 있는 단원별 모의고사를 통해 자신의 실력을 체크하고, 부족한 부분은 보충할 수 있습니다.

★ 주요 문항 동영상 강의 제공

• 문항 13개

• 배점 46점

• 제한시간 40

모의 A01 ☆☆☆

집합 $S = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 집합 X 를
 $X = \{x^2 - xy + y^2 | x \in S, y \in S\}$
라고 정의한 때 집합 X 의 모든 원소의 합은? (2점)

모의 A05 ☆☆☆

자연수 k 에 대하여 A_k 를 k 의 배수의 집합이라고
이때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2점)

2 내신+학평 유형 스토리

개념에 따른 유형을 자세히 공부할 수 있도록 학교 시험이나 학력평가에서 출제되었던 문제들을 촘촘하게 세분화하여 개념순, 난이도 순으로 수록하였습니다.

- **유형 정리**: 시험에서 출제되었던 모든 유형을 제시하여 효과적이고 완벽한 유형 분석을 할 수 있도록 하였습니다.
- **tip**: 유형에 따라 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR 코드**: 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

☆☆☆

☆☆☆

☆☆☆

1 다항식의 연산

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 계산법칙

(1) 교환법칙: $A+B=B+A$
 $AB=BA$

(2) 결합법칙: $A+(B+C)=(A+B)+C$
 $(AB)C=A(BC)$

※ 다항식의 덧셈, 뺄셈의 순서

① 괄호가 있으면 괄호를 툰고 주어진 식을 간단히 한다.
② 한 문항에 대하여 내림차순으로 정리한다.
③ 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

A32 ☆☆☆

두 다항식 $A=x^2-x+1, B=-x^2+2x$ 에
대하여 $A+B$ 는? (2점)

① $-x-1$ ② $-x+1$ ③ $x-1$
④ $x+1$ ⑤ $2x+1$

A33 ☆☆☆

두 다항식 $A=2x^2+3xy+2y^2,$
 $B=x^2+5xy+3y^2$ 에 대하여 $A-B$ 를 간단히 하면? (2점)

① $x^2+2xy-y^2$ ② $x^2-2xy-y^2$
③ $x^2-2xy+y^2$ ④ $-x^2+2xy+y^2$
⑤ $-x^2-2xy-y^2$

A35 ☆☆☆

두 다항식
 $A=x^2+y^2-1, B=2x^2-y^2+3$
에 대하여 $A+B$ 는? (2점)

① $2x^2+1$ ② $2x^2+2$ ③ $3x^2+1$
④ $3x^2+2$ ⑤ $3x^2+3$

A36 ☆☆☆

두 다항식
 $A=x^2-xy+y^2, B=x^2+xy-y^2$
에 대하여 $A+B$ 는? (2점)

① $2x^2$ ② $2y^2$ ③ $2xy$
④ x^2+y^2 ⑤ $2x^2+xy$

A37 ☆☆☆

두 다항식
 $A=2x^2-3xy, B=x^2-4xy-y^2$
에 대하여 $A-B$ 를 간단히 하면? (2점)

① x^2+xy ② x^2+2xy
③ x^2-xy+y^2 ④ x^2+xy+y^2
⑤ $x^2+2xy+y^2$

- 난이도: ☆☆☆ - 기본 문제, ☆☆☆ - 중급 문제
☆☆☆ - 중상급 문제, ☆☆☆ - 상급 문제

- **출처표시**: 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
 - 2017대비 수능(나) 22번: 2016년 11월에 실시한 수능
 - 2016실시 6월 학평 16(고1): 2016년 6월에 실시한 학력평가
 - 2023실시 3월 학평 10(고2): 2023년 3월에 실시한 학력평가

- **최다출제**: 내신, 학평에서 가장 출제율이 높은 문제
- **최신유형**: 최근 내신+학평에서 출제되는 새로운 유형의 문제
- **필수**: 유형 학습을 위해 꼭 확인 해야 하는 문제
- **중요**: 시험에 반드시 출제되는 중요 유형 체크



5 1등급 고난도 스토리 - 4점 문제+2등급 대비+1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 난이도 순으로 배열하여 종합적인 사고력과 응용력을 길러서 반드시 수학 1등급을 달성할 수 있도록 구성했습니다.

★ **1등급 대비** : 정답률이 9% 미만인 문제로, 1등급을 가르는 최고난도 문제

★ **2등급 대비** : 정답률이 9%~15%인 문제로, 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 최상급 문제

1등급 고난도 스토리 [4점+2등급 대비+1등급 대비] ★★★★★ 3등급 문제 2등급 1등급: 최상급 문제

A193 ★★★ 2020학사 11월 학평 2(고1)

9 이하의 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를 $A_k = \{x | k-1 \leq x \leq k+1, x \text{는 실수}\}$ 라 하자. $\{A_k\}$ 에서 겹치는 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$
 ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m 에 대하여 $|l-m| \leq 2$ 이면 두 집합 A_l 와 A_m 은 서로소가 아니다.
 ㄷ. 모든 A_k 와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 4이다.

[1등급 대비+2등급 대비]

A203 ★ 2등급 대비

세 집합 $A = \{x^2 + \frac{1}{x} | x \text{는 자연수}\}$, $B = \{x | x^2 = 7, x \text{는 복소수}\}$, $C = \{(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n | n \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 집합 $A \cup (B-C)$ 의 원소가 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$) (4점)

① -2 ② -1 ③ 0
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

A 204 정답 12 ○ 1등급 대비 [정답률 8%]
 ★ 주어진 조건으로부터 이차함수의 그래프 추론하기

1등급 주어진 조건을 해석하여 함수의 그래프를 추론하는 문제이다. 이차함수가 접할 때의 개념을 이해하여 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 그래프와 함수에 따른 특징을 정확히 알고 있다 조건을 해석할 수 있었다.

단서+발상
 먼저 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $(0, 0)$ 에서 x축에 접한다는 것은 $x=0$ 인 지점에서 $f(x)$ 가 x축과 한 점에서 만나는 것이다. $f(x)$ 의 이차항의 계수를 미지수로 설정한다. $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 모두 이차식(이므로 $f(x)+g(x)$ 의 식은 이제 3차의 식으로 나타나는 것을 알 수 있다. $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수, $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수 사이에 존재한다. $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이므로 $f(x)+g(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이므로 $f(x)+g(x)$ 의 최고차항의 계수를 미지수로 설정할 때, 등호의 좌변을 설정해서 구하도록 한다.

My Top Secret
 서울대 선배의 1등급 대비 전략
 다항함수 간의 계산이 복잡하여 주어진 조건을 '각 다항함수를 변형'한 함수로 하여 해석하지 말고 하나의 통합된 함수로 생각해

*** 수의 정리**
 $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n$ 을 제곱한 값이 양수인 n 가 나오려면 $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n = 1$ 의

1등급 대비 특장
 1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

문제 분석
 어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
 1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.

개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.

유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.

발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.

적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.

해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

7 입체 침삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

실수
문제를 푸는 과정에서 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

A 109 정답 ③ 여집합과 차집합
 [정답 공식: $A-B = A \cap B^c$ 를 이용해 주어진 집합을 간단히 한 뒤 원소를 구해 모두 나열한다.]

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 집합 $B^c - A^c$ 의 모든 원소의 합은? (단, $B^c = U - B$) (4점)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

1st $A \cap B^c = A - B$ 임을 이용하여 $B^c - A^c$ 를 간단히 정리해 보.
 $B^c - A^c = B^c \cap (A^c)^c \rightarrow P - Q = P \cap Q^c, (P^c)^c = P$
 $= A \cap B^c = A - B = \{1, 2, 4, 8\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 8\}$
 따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은 $2+4+8=14$

2nd 다른 풀이: 전체 집합 나열하기
 두 집합의 공통인 원소를 정확히 파악하여 보.
 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에 대하여 $B^c = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A^c = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ 이므로, $B^c - A^c = \{2, 4, 6, 8, 10\} - \{3, 5, 6, 7, 9, 10\} = \{2, 4, 8\}$ (이하 동일)

3rd **독특한 풀이: 원소나열법으로 나타내기**
 c 전등이 점등되는 숫자는 전체집합의 원소 중 3, 4, 5이므로 벤다이어그램에서 아무도 부분에 있는 원소이다.
 $\therefore \{3, 4, 5\} = P^c \cup Q$

4th **독특한 풀이: 원소나열법으로 나타내기**
 c 전등이 점등되는 모든 입력값의 집합은 $\{3, 4, 5\}$ 이므로 각 선택지가 나타내는 집합을 원소나열법으로 나타내보자.
 ① $P = \{2, 3, 5\}$ ② $Q = \{3, 5\}$
 ③ $Q^c = \{2, 4\}$ 이므로 $P \cup Q^c = \{2, 3, 4, 5\}$
 ④ $P^c = \{4\}$ 이므로 $P^c \cup Q = \{3, 4, 5\}$ ⑤ $P^c \cap Q^c = \{4\}$
 따라서 구하는 집합은 ④이다.

*** 이차방정식의 해가 주어졌을 때 이차방정식 세우기**
 최고차항의 계수가 $k(k > 0)$ 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 이차방정식 $f(x) < 0$ 의 해가 존재하려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 해. 이때, x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β 라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 해는 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 이고 이차방정식 $f(x) < 0$ 의 해는 $\alpha < x < \beta$ 라 하자. 따라서 $f(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)$ 라 할 수 있다.

A 184 정답 $\{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$ 여집합과 차집합
 [정답 공식: 집합 A 의 원소는 36의 약수이므로 하므로 조건을 만족시키는 두 집합 B, C 를 각각 구해 $B-C$ 를 구한다.]

1st 집합 A 의 원소도 모두 자연수인가?
 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 A 가 조건 $'x \in A$ 이면 $\frac{36}{x} \in A'$ 에 의해 $\frac{36}{x}$ 가 자연수여야 하므로, x 는 36의 양의 약수'를 만족시킨다. 집합 A 중에서 원소의 개수가 가장 많은 집합 B , 원소의 개수가 가장 적은 집합을 C 라고 할 때, 집합 $B-C$ 를 구하는 과정을 서술하시오. (단, $A \neq \emptyset$)

2nd 집합 A 의 원소도 모두 자연수인가?
 집합 A 의 원소는 자연수이고 $x \in A$ 이면 $\frac{36}{x} \in A'$ 이므로 x 가 될 수 있는 수는 36의 양의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다. $\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

3rd 집합 $B-C$ 를 구하자. 한 집합 안에 원소로 같이 포함되야 함을 명심해!
 $B-C = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\} - \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$

4th $A \cap B = \{a, b\}$ 인 경우의 전체집합 U 의 부분집합 B 의 개수를 구해라.
 $A \cap B$ 는 $\{a, c\}$ 또는 $\{b, c\}$ 일 수도 있어.
 $A \cap B = \{a, b\}$ 인 경우 $a \in B, b \in B, c \notin B$ 이어야 한다.

5th 집합 A 의 원소 중 집합 B 와 공통이 아닌 원소는 집합 B 의 원소가 아니라는 것을 증명하면 된다.
 즉, 부분집합 $B = \{d, e\}$ 의 부분집합 $\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}$ 에 원소 a, b 를 넣은 것과 같으므로 부분집합 B 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)이다.
 따라서 $A \cap B = \{a, c\}$, $A \cap B = \{b, c\}$ 인 경우도 마찬가지로 생각하면 집합 B 의 개수는 각각 4개이므로 구하는 집합 $B-C$ 의 개수는 모두 $4 \times 3 = 12$ (개)이다.

6th 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속할 때, 집합 A 를 집합 B 의 부분집합이라고 한다.
 집합 A 가 집합 B 에 포함될 때, 기호로 $A \subset B$ 라 같이 나타내고, 집합 A 가 집합 B 에 포함되지 않을 때, 기호로 $A \not\subset B$ 라 같이 나타낸다.

적용 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이해할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

채점 기준표
서술형 문제에 대한 적절한 풀이 기준을 제시하여 중요한 포인트를 놓치지 않게 하였습니다.

참고
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠져서 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

수능 해강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

문항 배열 및 구성 [1201제]

1 개념 이해와 개념 확인 문제 [300제]

각 단원에서 배울 개념 중 중요한 것들을 자세히 설명하고 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제를 수록하였습니다.

2 최신 10개년 학력평가 기출 문제 전 문항 수록 [새교육과정 1201제]

- 2020~2023 학력평가 전 문항 수록 (76제)
- 새교육과정에 맞는 2013~2019 학력평가 우수 문항 선별 수록 (155제)
- 새교육과정 완벽 대비를 위한 유형별 내신 기출 변형 문제 수록 (496제)
- 필수 유형 완전 학습-내신+학평 유형 스토리 [137 유형, 문제 807제]

★ 내신 1등급을 위한 내신 기출 변형 문제 추가 수록

1. 내신 1등급을 위해 137개 문제 유형으로 세분화

수학 개념을 쉽고 빠르게 이해하는 가장 좋은 학습법은 문제 유형을 세분화해서 공부하는 것입니다.
학교 시험은 다양한 유형에서 고르게 출제되기 때문에, 유형을 세분화해서 공부해야 합니다.
그래서 내신 유형 대비를 위한 기출 변형 문제를 수록하였습니다.

2. 137개 유형 연습을 위한 기출 문제 + 내신 기출 변형 문제 보충 수록

학력평가는 특별한 유형에서 많이 출제되기 때문에 어떤 유형은 기출 문제가 과하게 많고,
어떤 유형은 기출 문제가 없습니다. 그래서 137개 유형에 맞는 내신 기출 변형 문제를 충분히 수록해서
내신 1등급을 위한 학습을 완벽히 할 수 있도록 하였습니다.

3 서술형 단계별 훈련을 위한 내신 기출 변형 문제 서술형 스토리 [서술형 69제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 서술형 문제를 구성하였습니다.

4 내신+학평 대비 단원별 모의고사 [기출 문제+기출 변형 문제 94제]

[고1 수학(하) 문항 구성표]

시행연도	고1 6월 학력평가	고1 9월 학력평가	고1 11월 학력평가	고2 3월 학력평가	고2 6월, 9월, 11월 학력평가	연도별 문항 수
2023				14		14
2022			8	15		23
2021	출제 범위 아님		8	14		22
2020			5	12		17
2019			7	25		32
2018			9		2	11
2017		1		3	7	11
2016	1	2	2	7	16	28
2015	1	2	4	9	24	40
2014			6	5		11
2013	6	5	4	7		22
내신 기출 변형 문제	582					
기본 개념, 서술형 문제	369					
교육과정 개편으로 고1 과정에 맞는 고3 학력평가, 평가원, 수능 기출 문제 18문항 수록						
총 수록 문항 수						1201

■ 내신 기출 변형 문제 : 137개 유형 예상 문제 수록

■ 학평 기출 : 2023~2020 학평 전부 수록, 2019~2013(7개년) 학평 선별

■ 수능 기출 : 2018~2013(6개년) 수능 선별



집합

★ 유형 차례

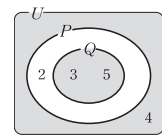
- 유형 01 집합의 뜻과 표현 방법
- 유형 02 유한집합과 무한집합
- 유형 03 집합의 원소의 개수
- 유형 04 기호 $\in$, $\subset$ 의 사용
- 유형 05 집합 사이의 포함 관계
- 유형 06 집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 미지수 구하기
- 유형 07 부분집합 구하기
- 유형 08 서로 같은 집합
- 유형 09 부분집합의 개수
- 유형 10 특정한 원소에 대한 부분집합의 개수
- ★ 중요 유형 11 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수
- 유형 12 합집합과 교집합
- 유형 13 여집합과 차집합
- 유형 14 서로소인 집합
- 유형 15 주어진 조건을 만족시키는 집합
- 유형 16 집합의 연산과 집합의 포함 관계
- 유형 17 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기
- 유형 18 조건을 만족시키는 부분집합의 개수
- 유형 19 집합의 연산법칙
- 유형 20 벤다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합
- 유형 21 항상 같은 집합 구하기
- 유형 22 배수와 약수의 집합의 연산
- 유형 23 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산
- 유형 24 새롭게 약속된 집합의 연산
- ★ 중요 유형 25 유한집합의 원소의 개수
- ★ 중요 유형 26 유한집합의 원소의 개수의 활용
- 유형 27 집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값
- 유형 28 집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값의 활용

◆ 단원 학습 목표

- 집합의 뜻과 표현, 집합 사이의 포함 관계를 정확히 안다.
- 집합의 연산을 하고, 원소의 개수와 부분집합의 개수를 구할 수 있다.

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 집합과 원소, 부분집합 등 새로 정의되는 용어와 기호가 많으니까 잘 정리해 두어야 한다. $\subset$, $\in$, $\cup$, $\cap$ 등과 같이 집합과 원소, 집합과 집합 사이에 사용되는 기호가 헷갈리기 쉬우니까 정확하게 익혀서 사용한다.
- 둘 이상의 집합 사이의 포함 관계나 집합에 속한 원소를 파악할 때에는 벤다이어그램을 활용한다. 특히, 문제에 자주 나오는 벤다이어그램의 형태는 집합의 연산으로 나타내는 방법을 알아두면 편리하다.



예 $(A-B) \cup (B-A)$

★ 자주 출제되는 개념+공식

1 집합의 연산과 성질

- ① $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$
- ② $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$
- ③ $A^c = \{x | x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$
- ④ $A - B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$
- ⑤ $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup A^c = U, A \cap A^c = \emptyset$
- ⑥ $A \cap B^c = A - (A \cap B)$
 $= (A \cup B) - B = A - B$

2 드모르간의 법칙

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

3 유한집합의 원소의 개수

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



1 집합의 뜻과 표현 — 유형 01~04

(1) 집합과 원소¹

- ① 집합 : 어떤 조건에 대하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임
 ② 원소 : 집합을 이루는 대상 하나하나
 (i) a 는 집합 A 의 원소이다. $\Leftrightarrow a \in A$ **아니야.**

참고 6의 양의 약수의 모임

그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다. $\Leftrightarrow 1, 2, 3, 6$

6의 양의 약수의 모임을 집합 A 라 하면 1은 A 의 원소이므로 $1 \in A$ 이고,

5는 A 의 원소가 아니므로 $5 \notin A$

(ii) b 는 집합 A 의 원소가 아니다. $\Leftrightarrow b \notin A$

+개념 Tip

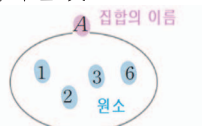
- ① 일반적으로 집합의 이름은 알파벳 대문자 $A, B, C, \dots$ 로 나타내고, 원소는 소문자 $a, b, c, \dots$ 로 나타낸다.

(2) 집합의 표현²

- ① 원소나열법 : 집합에 속하는 모든 원소를 $\{ \}$ 안에 나열하는 방법
 예) 6의 양의 약수의 모임을 원소나열법으로 표현하면 $\{1, 2, 3, 6\}$
 ② 조건제시법 : 집합에 속하는 원소들의 공통된 성질을 제시하는 방법
 $\Leftrightarrow \{x | x \text{에 대한 조건}\}$
 예) 6의 양의 약수의 모임을 조건제시법으로 표현하면 $\{x | x \text{는 6의 양의 약수}\}$

- ③ 벤다이어그램 : 집합과 원소를 간단한 그림으로 나타낸 것

예) 집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 을 그림으로 나타내면



+개념 보충

- ② 집합을 원소나열법으로 나타낼 때,
 ① 원소의 배열 순서는 생각하지 않는다.
 ② 같은 원소는 중복하여 쓰지 않는다.
 ③ ‘...’를 사용하여 일정한 규칙이 있는 원소의 일부를 생략하기도 한다.

+개념 Tip

- ③ 공집합은 원소의 개수가 0이므로 유한집합으로 생각한다.
 $\Leftrightarrow A = \emptyset$ 일 때, $n(A) = 0$

(3) 집합의 구분

- ① 유한집합 : 원소의 개수가 유한개인 집합 $\Leftrightarrow n(A)$: 유한집합 A 의 원소의 개수
 ② 무한집합 : 원소가 무수히 많은 집합 예) 자연수들의 집합 N
 ③ 공집합³ : 원소가 하나도 없는 집합으로 기호로는 $\emptyset$ 으로 나타낸다.
 예) 1 이하의 소수의 집합

+개념 확장

- ④ 부분집합의 성질
 세 집합 A, B, C 에 대하여
 (i) 공집합 ($\emptyset$)은 모든 집합의 부분집합이다. $\Leftrightarrow \emptyset \subset A$
 (ii) 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. $\Leftrightarrow A \subset A$
 (iii) $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

- ⑤ 집합 A 의 진부분집합은 집합 A 의 부분집합 중에서 자기 자신을 제외한 부분집합이므로 원소의 개수가 n 개인 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $(2^n - 1)$ 개이다.

- ⑥ 특정한 원소를 포함하거나 포함하지 않는 부분집합의 개수

- ① 특정한 원소 $k(k \leq n)$ 개를 포함하지 않는 부분집합의 개수 : 2^{n-k}
 ② 원소의 개수가 n 개인 집합 A 에 대하여 집합 A 의 원소 중 r 개의 원소는 반드시 포함하고, k 개의 원소는 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-r-k} 이다.

2 집합 사이의 포함 관계 — 유형 05~08

- (1) 부분집합⁴ : 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속할 때, 집합 A 를 집합 B 의

부분집합이라고 한다. $\Leftrightarrow A \subset B$

$A \subset B$ 는 A 가 B 의 진부분집합이거나 $A = B$ 임을 뜻한다.

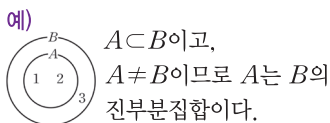
- (2) 서로 같은 집합

- ① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때,

두 집합 A, B 는 서로 같다고 한다. $\Leftrightarrow A = B$

- ② 진부분집합 : $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때,

A 를 B 의 진부분집합이라고 한다.



3 부분집합의 개수 — 유형 09~11

원소의 개수가 n 인 집합 A 에 대하여

- (1) 집합 A 의 부분집합의 개수 : 2^n 예) $n(A) = 3$ 의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$

- (2) 집합 A 의 진부분집합의 개수 : $(2^n - 1)$

- (3) 특정한 원소 $r(r \leq n)$ 개를 반드시 포함하는 (또는 포함하지 않는)

부분집합의 개수 : 2^{n-r}

**1 집합의 뜻과 표현**

[A01~A03] 다음 중 집합인 것은 ○를, 집합이 아닌 것은 ×를 () 안에 써넣으시오.

A01 5보다 작은 자연수의 모임 ()

A02 아름다운 꽃들의 모임 ()

A03 우리 반에서 키가 가장 큰 학생의 모임 ()

[A04~A09] 24의 양의 약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 □ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

A04 $1 \square A$ A05 $4 \square A$ A06 $5 \square A$

A07 $9 \square A$ A08 $12 \square A$ A09 $18 \square A$

[A10~A11] 다음 집합을 원소나열법으로 나타내시오.

A10 $\{x|x \text{는 } 45 \text{ 이하의 } 9 \text{의 양의 배수}\}$

A11 $\{x|x \text{는 } 100 \text{의 양의 약수}\}$

[A12~A13] 다음 집합을 조건제시법으로 나타내시오.

A12 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

A13 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 47\}$

[A14~A16] 다음 집합이 유한집합이면 ‘유’, 무한집합이면 ‘무’를 () 안에 써넣으시오.

A14 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ()

A15 $\{x|x \text{는 세 자리의 자연수}\}$ ()

A16 $\{x|x \text{는 일의 자리가 4인 자연수}\}$ ()

[A17~A19] 다음을 구하시오.

A17 $n(\{0\})$

A18 $n(\{1, 2, 5, 10\})$

A19 $n(\emptyset)$

2 집합 사이의 포함 관계

[A20~A22] 다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 기호 $\subset, =$ 중 알맞은 것을 사용하여 나타내시오.

A20 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 양의 배수}\},$
 $B = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 양의 배수}\}$

A21 $A = \{x|x^2=9\}, B = \{x||x|=3\}$

A22 $A = \emptyset, B = \{0\}$

[A23~A25] 다음 집합의 부분집합을 모두 구하시오.

A23 $\{-1, 1\}$

A24 $\{x|x \text{는 } 5 \text{보다 작은 소수}\}$

A25 $\{x|x \text{는 } 9 \text{의 양의 약수}\}$

[A26~A28] 다음 두 집합 A, B 사이의 관계를 기호 $=, \neq$ 를 사용하여 나타내시오.

A26 $A = \{2, 5, 9\}, B = \{5, 9, 2\}$

A27 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $B = \{x|x \text{는 음이 아닌 정수}\}$

A28 $A = \{x|x \text{는 } 3 \text{의 양의 약수}\}$
 $B = \{x|x \text{는 } 4 \text{ 이하의 양의 홀수}\}$

A29 집합 $A = \{1, \{1\}\}$ 의 진부분집합을 모두 구하시오.

3 부분집합의 개수

[A30~A33] 집합 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ 에 대하여 다음을 구하시오.

A30 집합 A 의 부분집합의 개수

A31 집합 A 의 진부분집합의 개수

A32 집합 A 의 부분집합 중 d 를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수

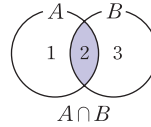
A33 집합 A 의 부분집합 중 a, e 를 원소로 갖지 않는 집합의 개수



4 집합의 연산 — 유형 12~14

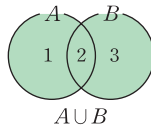
- (1) **교집합**: 두 집합 A, B 에 대하여 A 에도 속하고 B 에도 속하는 원소들 전체로 이루어진 집합

$$\Rightarrow A \cap B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \in B\} = \{2\}$$



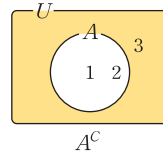
- (2) **합집합**: 두 집합 A, B 에 대하여 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소들 전체로 이루어진 집합

$$\Rightarrow A \cup B = \{x | x \in A \text{ 또는 } x \in B\} = \{1, 2, 3\}$$

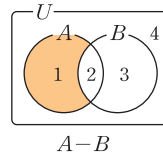


- (3) **여집합**: 전체집합 U 의 부분집합 A 에 대하여 U 의 원소 중에서 A 에 속하지 않는 원소들 전체로 이루어진 집합

$$\Rightarrow A^c = \{x | x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\} = \{3\}$$



- (4) **차집합**: 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 A 에는 속하지만 B 에는 속하지 않는 원소들 전체로 이루어진 집합
- $$\Rightarrow A - B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\} = \{1\}$$



- (5) **서로소**¹⁰: 두 집합 A, B 에서 공통인 원소가 하나도 없을 때,¹¹ 즉 $A \cap B = \emptyset$ 일 때, A 와 B 는 서로소라고 한다.

참고 집합과 수의 서로소의 차이

집합에서는 두 집합의 공통 원소가 하나도 없을 때 두 집합이 서로소라고 하지만 수에서는 공약수가 1뿐인 두 자연수를 서로소라고 한다.

5 집합의 연산에 대한 성질 — 유형 15~24

- (1) **집합의 연산의 성질**¹²: 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

- | | |
|--|--|
| ① $A \cup A = A, A \cap A = A$ | ② $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| ③ $A \cup U = U, A \cap U = A$ | ④ $A \cup A^c = U, A \cap A^c = \emptyset$ |
| ⑤ $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$ | ⑥ $(A^c)^c = A$ |
| ⑦ $A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$ | |

- (2) **집합의 연산법칙**

- ① **교환법칙**: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- ② **결합법칙**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ③ **분배법칙**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ④ **드모르간의 법칙**: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

6 유한집합의 원소의 개수 — 유형 25~28

전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여

- (1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ¹³
- (2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
- (3) $n(A^c) = n(U) - n(A)$
- (4) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(B)$ ¹⁴

+ 개념 보충

- ⑦ 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B$ 는 A 의 부분집합인 동시에 B 의 부분집합이다.

- ⑧ 두 집합 A, B 에 대하여 A 와 B 는 각각 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

- ⑨ 어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음의 집합을 전체집합이라 하고, 보통 U 로 나타낸다.

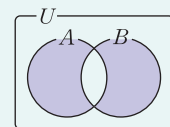
+ 개념 확장

- ⑩ 서로소와 같은 표현

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow A - B = A \\ &\Leftrightarrow B - A = B \\ &\Leftrightarrow n(A \cap B) = 0 \end{aligned}$$

- ⑪ 공집합은 모든 집합과 공통인 원소가 없으므로 공집합은 모든 집합과 서로소이다.

- ⑫ 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ 라고 할 때, $A \triangle B$ 를 대칭차집합이라고 한다.



$$\begin{aligned} (A - B) \cup (B - A) &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

+ 개념 보충

- ⑬ $A \cap B = \emptyset$ 이면

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

- ⑭ $n(A - B) \neq n(A) - n(B)$ 임을 주의한다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= n(A \cup B) - n(B) \end{aligned}$$



4 집합의 연산

[A34~A36] 다음 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B$ 를 구하시오.

A34 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{3, 5, 7\}$

A35 $A = \{8, 16, 24, 32, \dots\}, B = \{16, 32, 48, \dots\}$

A36 $A = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 6 \text{의 양의 배수}\},$
 $B = \{x | x \text{는 } 18 \text{의 양의 약수}\}$

[A37~A39] 다음 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 를 구하시오.

A37 $A = \{6, 4, 1\}, B = \{4, 1, 6\}$

A38 $A = \{1, 2, 5, 10\}, B = \{x | x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$

A39 $A = \{x | x \text{는 무리수}\}, B = \{x | x \text{는 유리수}\}$

[A40~A42] 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 A, B, C 가 다음과 같을 때, 각 집합의 여집합을 구하시오.

A40 $A = \{3, 5, 7, 9\}$

A41 $B = \{x | x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$

A42 $C = \{x | x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$

[A43~A45] 다음 두 집합 A, B 에 대하여 $A - B$ 를 구하시오.

A43 $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, B = \{5, 10, 15\}$

A44 $A = \{b, d, e\}, B = \{a, c, f, g\}$

A45 $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\},$
 $B = \{x | x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$

5 집합의 연산에 대한 성질

A46 전체집합 U 의 서로 다른 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, [보기] 중 옳지 않은 것을 모두 고르시오.

[보기]

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| ㉠. $A \cup B = A$ | ㉡. $A - B = \emptyset$ |
| ㉢. $A^c \cap B = \emptyset$ | ㉣. $A \subset B$ |
| ㉤. $B^c \subset A^c$ | |

A47 다음은 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup (A \cap B)^c = U$ 가 성립함을 보이는 과정이다. (가) ~ (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B)^c &= A \cup (\boxed{\text{(가)}})^c \cdots \text{드모르간의 법칙} \\ &= (A \cup A^c) \cup B^c \cdots \boxed{\text{(나)}} \\ &= \boxed{\text{(다)}} \cup B^c \\ &= U \end{aligned}$$

A48 세 집합 $A = \{a, c\}, B = \{a, d, e\}, C = \{b, c, e\}$ 에 대하여 $(C \cap A) \cup (C \cap B)$ 를 구하시오.

[A49~A52] 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음을 간단히 하시오.

A49 $B \cap (A \cap B^c)$

A50 $(A - B)^c \cap A$

A51 $B^c \cap (A \cup B)$

A52 $\{C \cup (A \cap C)\}^c \cap B$

6 유한집합의 원소의 개수

[A53~A56] 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 10, n(A) = 6, n(B) = 5, n(A \cup B) = 8$ 일 때, 다음을 구하시오.

A53 $n(B^c)$

A54 $n(A \cap B)$

A55 $n(A - B)$

A56 $n(A^c \cap B^c)$

A57 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 14, n(B) = 16, n(C) = 20,$
 $n(A \cap B) = 10, n(B \cap C) = 9, n(C \cap A) = 7,$
 $n(A \cup B \cup C) = 29$ 일 때, $n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하시오.

[A58~A59] 40명의 학생 중에서 음악을 좋아하는 학생이 23명, 미술을 좋아하는 학생이 15명, 음악과 미술 어느 것도 좋아하지 않는 학생이 12명일 때, 다음을 구하시오.

A58 음악과 미술 둘 다 좋아하는 학생 수

A59 음악만 좋아하는 학생 수



1 집합의 뜻과 표현

유형 01 집합의 뜻과 표현 방법

기초

- (1) **집합** : 어떤 조건에 대하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임
- (2) **집합의 표현 방법**
 - ① 원소나열법 : 모든 원소를 { } 안에 나열하는 방법
 - ② 조건제시법 : 원소들의 공통된 성질을 제시하는 방법
 - ③ 벤다이어그램 : 그림을 이용하여 제시하는 방법

tip

‘예쁜’, ‘높은’, ‘큰’ 등 조건이 명확하지 않은 것은 집합이 아니다.
예 큰 수의 모임(x), 예쁜 컵의 모임(x)

A60 ※※※

다음 중 집합이 아닌 것은? (2점)

- ① 8의 약수의 모임
- ② 작은 홀수의 모임
- ③ 10보다 작은 짝수의 모임
- ④ 키가 160 cm인 사람의 모임
- ⑤ A고등학교 수학 교사의 모임

A61 ※※※

다음 [보기] 중 집합인 것은 모두 몇 개인가? (3점)

[보기]

- ㄱ. 3보다 작은 양의 짝수의 모임
- ㄴ. 100에 가까운 자연수의 모임
- ㄷ. 우리나라에서 가장 높은 산의 모임
- ㄹ. 6보다 작은 소수의 모임
- ㅁ. 수학을 잘하는 학생들의 모임

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A62 ※※※

다음 중 나머지 빛과 다른 하나는? (3점)

- ① $\{x|x \text{는 } 2 < x < 8, x \text{는 홀수}\}$
- ② $\{x|x \text{는 } 3 \leq x \leq 8, x \text{는 홀수}\}$
- ③ $\{x|x \text{는 홀수인 한 자리의 소수}\}$
- ④ $\{x|x \text{는 } 1 < x < 10, x \text{는 소수}\}$
- ⑤ $\{x|x \text{는 } 3 \leq x \leq 10, x \text{는 소수}\}$



유형 02 유한집합과 무한집합

기초

- (1) **유한집합** : 집합의 원소의 개수가 유한개인 집합
- (2) **무한집합** : 집합의 원소의 개수가 무한인 집합

tip

- ① 집합의 원소의 개수가 0인 공집합도 유한집합이다.
- ② 무한집합은 자연수의 집합과 같이 셀 수 있는 무한집합과 실수의 집합과 같이 셀 수 없는 무한집합이 있다.

A63 ※※※

다음 중 무한집합인 것은? (2점)

- ① $\emptyset$ ② $\{0\}$
- ③ $\{1, 2, 3\}$ ④ $\{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $\{x|x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$

A64 ※※※

집합 $\{x|x \text{는 } \square\}$ 가 유한집합일 때, 다음 중 $\square$ 안에 알맞은 것은? (2점)

- ① 짝수 ② 3의 배수 ③ 정수
- ④ 소수 ⑤ 10의 약수

A65 ※※※

다음 중 유한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)



(3점)

- ① $\{x|x \text{는 } 10 \text{보다 큰 짝수}\}$
- ② $\{x|x^2 - 4 < 0, x \text{는 정수}\}$
- ③ $\left\{x \middle| x = \frac{p}{q}, p, q \text{는 정수}, q \neq 0\right\}$
- ④ $\{x|x \text{는 } 3 \text{으로 나눌 때 나머지가 } 2 \text{인 자연수}\}$
- ⑤ $\{x|x \text{는 } 2 \text{보다 큰 짝수인 소수}\}$

유형 03 집합의 원소의 개수

기초

유한집합 A 의 원소의 개수 $\rightarrow n(A)$ 집합 A 를 원소나열법으로 나타낸 후 그 개수를 세면 된다.

tip

 $n(\{1, 2\})=2, n(\emptyset)=0$ 이지만 $n(\{\emptyset\})=1$ 임에 주의한다.

A66

집합 $\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 원소의 개수는? (2점)

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A67

두 집합 $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 3, 5\}$ 의 원소의 개수를 각각 m , n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은? (2점)

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

A68

필수

두 집합 $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합

$$P=\{p|p=a+b, a \in A, b \in B\}$$

라고 할 때, 집합 P 의 원소의 개수는? (3점)

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

유형 04 기호 $\in$, $\subset$ 의 사용

기초

(1) 원소와 집합 사이의 관계

 $(\text{원소}) \in (\text{집합}), (\text{원소}) \notin (\text{집합})$

(2) 집합과 집합 사이의 관계

 $(\text{집합}) \subset (\text{집합}), (\text{집합}) \not\subset (\text{집합})$

tip

원소와 집합 사이의 관계는 $\in$ 를 사용하고 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$ 를 사용한다. 집합 $A=\{a, \{b, c\}\}$ 처럼 집합을 원소로 갖는 집합도 있으므로 집합 기호가 있다고 집합이라고 생각할 수 없는 것도 있음에 주의한다.

A69

최다출제



집합 $S=\{\emptyset, 1, 2, \{1\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (2점)

- ① $\emptyset \subset S$ ② $\{1\} \in S$ ③ $1 \in S$
④ $\emptyset \in S$ ⑤ $\{1, 2\} \in S$

A70

집합 $A=\{\emptyset, 0\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (2점)

- ① $\emptyset \in A$ ② $\emptyset \subset A$ ③ $\{0\} \subset A$
④ $\{\emptyset\} \in A$ ⑤ $\{\emptyset, 0\} \subset A$

A71

집합 $A=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (2점)

- ① $\emptyset \in A$ ② $\emptyset \subset A$ ③ $\{\emptyset\} \in A$
④ $\{\emptyset\} \subset A$ ⑤ $\{\{\emptyset\}\} \in A$

A72

다음 [보기] 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (3점)



[보기]

- ㄱ. $\emptyset \in \emptyset$ ㄴ. $\emptyset \subset \{0\}$
ㄷ. $1 \in \{0, 1\}$ ㄹ. $\{1\} \in \{1, 2\}$

- ① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ



1등급 고난도 스토리

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

*** : 상급 문제
2등급·1등급 : 최상급 문제

A194 *** 2020실시 11월 학평 2(고1)



9 이하의 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를

$$A_k = \{x \mid k-1 \leq x \leq k+1, x \text{는 실수}\}$$

라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(4점)

[보기]

ㄱ. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$

ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m 에 대하여 $|l-m| \leq 2$ 이면
두 집합 A_l 과 A_m 은 서로소가 아니다.

ㄷ. 모든 A_k 와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합
중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는
4이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A195 *** 2019실시 11월 학평 2(고1)



전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의
부분집합

$$A_k = \{x \mid x(y-k) = 30, y \in U\},$$

$$B = \left\{x \mid \frac{30-x}{5} \in U\right\}$$

에 대하여 $n(A_k \cap B^c) = 1$ 이 되도록 하는 모든 자연수
 k 의 개수는? (4점)

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

A196 *** 2016실시(가) 6월 학평 28(고2)



어느 고등학교 학생들을 대상으로 수학문제집
A, B, C의 구매 여부에 대하여 조사한 결과가
다음과 같다.

(가) A와 B를 모두 구매한 학생은 15명, B와 C를 모두
구매한 학생은 12명, C와 A를 모두 구매한 학생은
11명이다.

(나) A와 B 중 적어도 하나를 구매한 학생은 55명, B
와 C 중 적어도 하나를 구매한 학생은 54명, C와
A 중 적어도 하나를 구매한 학생은 51명이다.

수학문제집 A를 구매한 학생의 수를 구하시오. (4점)

A197 ***



자연수를 원소로 하는 두 집합

$$M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\},$$

$$N = \{a_i + d \mid a_i \in M, d \text{는 상수}\}$$

에 대하여 M 의 모든 원소의 합은 32, $M \cup N$ 의 모든
원소의 합은 62이고, $M \cap N = \{4, 7, 9\}$ 이다. 이때, 집합
 M 을 원소나열법으로 나타내시오. (단, $n(M) = n(N) = 6$)
(4점)

A198 ***



집합 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 부분집합은 n 개가 있다. 이것을 각각 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 이라 하고 집합 A_k 의 모든 원소의 합을 a_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$)라고 한다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + n$ 의 값을 구하시오. (4점)

A199 ***

2016실시(가) 6월 학평 26(고2)



전체집합 $U = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A 는 원소의 개수가 4이고, 모든 원소의 합이 21이다. 상수 k 에 대하여 집합 $B = \{x+k | x \in A\}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A \cap B = \{4, 6\}$ (나) $A \cup B$ 의 모든 원소의 합이 40이다.

집합 A 의 모든 원소의 곱을 구하시오. (4점)

A200 ***

2018실시 11월 학평 20(고1)



18 이하의 자연수 k 에 대하여 두 집합

$$A = \{x | x \text{는 } k \text{의 양의 약수}\}, B = \{2, 5, 6\}$$

이 있다. $n(A \cap B) = 2$ 일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A \cap B = \{2, 5\}$ 이면 $k=10$ 이다.ㄴ. $A \cap B = \{5, 6\}$ 을 만족하는 k 가 존재한다.

ㄷ. 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k 의 값의 합은 28이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A201 ***

2021실시 11월 학평 21(고1)



$1 \leq a < b$ 인 두 상수 a, b 에 대하여 세 집합

$$A = \left\{ (x, y) \left| y = \frac{4}{3}x \text{이고 } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1 \right. \right\},$$

$$B = \left\{ (x, y) \left| y = \frac{4}{3}x \text{이고 } (x-a-1)^2 + (y-a)^2 = a^2 \right. \right\},$$

$$C = \left\{ (x, y) \left| y = \frac{4}{3}x \text{이고 } (x-b-1)^2 + (y-b)^2 = b^2 \right. \right\}$$

이 있다. $n(A \cup B \cup C) = 3$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (4점)

① $\frac{14}{5}$

② 3

③ $\frac{16}{5}$ ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$

A202 ***

2022실시 3월 학평 19(고2)



두 자연수 k, m ($k \geq m$)에 대하여 전체집합

$$U = \{x | x \text{는 } k \text{ 이하의 자연수}\}$$

의 두 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } m \text{의 약수}\}$, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $B - A = \{4, 7\}$, $n(A \cup B^c) = 7$

(나) 집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든 원소의 합은 서로 같다.

집합 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합은? (4점)

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

A203 ☆ 2등급 대비



세 집합

$$A = \left\{ i^n + \frac{1}{i^n} \mid n \text{은 자연수} \right\},$$

$$B = \{ z \mid z^2 = \bar{z}, z \text{는 복소수}, \bar{z} \text{는 } z \text{의 켈레복소수} \},$$

$$C = \left\{ \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n \mid n \text{은 자연수} \right\}$$

에 대하여 다음 중 집합 $A \cup (B - C)$ 의 원소가 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$) (4점)

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

A204 ☆ 1등급 대비 / 2015실시(나) 6월 학평 27(고2)



실수 전체의 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(A) = 5, B = \left\{ \frac{x+a}{2} \mid x \in A \right\}$$

이다. 두 집합 A, B 가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하시오. (4점)

- (가) 집합 A 의 모든 원소의 합은 28이다.
 (나) 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 49이다.
 (다) $A \cap B = \{10, 13\}$

A205 ☆ 1등급 대비 2022실시 3월 학평 30(고2)



최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 와
 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 있다. 방정식
 $\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}=0$ 의 모든 실근의 집합을
 A 라 하고, 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 모든 실근의 집합을
 B 라 하면 두 실수 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 에 대하여

$$A = \{\alpha, \beta\}, B = \{\alpha, \beta+3\}$$

이다. 상수 k 에 대하여 방정식

$$\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 이 세 실근의 합이
 12일 때, $\alpha + \beta + k$ 의 값을 구하시오. (4점)



★ 내신+학평 대비 단원별 모의고사

[제한시간 40분]

- A 집합 - 13문항
- B 명제 - 14문항
- C 함수 - 13문항
- D 유리식과 유리함수 - 13문항
- E 무리식과 무리함수 - 13문항
- F 경우의 수 - 14문항
- G 순열과 조합 - 14문항





모의

A01 ***

집합 $S = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 집합 X 를

$$X = \{x^2 - xy + y^2 \mid x \in S, y \in S\}$$

라고 정의할 때, 집합 X 의 모든 원소의 합은? (2점)

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

모의

A02 ***

집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?
(2점)

- ① $\{\emptyset\} \subset A$ ② $\emptyset \in A$
③ $\{\emptyset\} \in A$ ④ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset A$
⑤ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$

모의

A03 ***

두 집합 $A = \{1, 3, x^2 + 4x\}$, $B = \{1, x - 2, x^2 + 1\}$ 에
대하여 $A \cap B = \{1, -4\}$ 일 때, $A \cup B$ 의 모든 원소의
합을 구하시오. (3점)

모의

A04 ***

두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수인 자연수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여
 $(X \cap A^c) \cup A = A$, $(A - B) \cup X = X$
를 만족시키는 집합 X 의 개수는? (3점)

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 16

모의

A05 ***

자연수 k 에 대하여 A_k 를 k 의 배수의 집합이라고 하자.
이때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

- ㄱ. $A_2 \cap A_4 = A_2$
ㄴ. $A_3^c \cap A_6 = \emptyset$
ㄷ. $(A_{12} \cup A_{16}) \subset A_k$ 인 k 는 4뿐이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모의

A06 ***

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서
적어도 한 개의 홀수를 포함하는 집합의 개수는? (3점)

- ① 24 ② 48 ③ 72
④ 96 ⑤ 120

모의

A07 ***

전체집합 U 의 두 부분집합 A , B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때,
다음 중 옳은 것은? (3점)

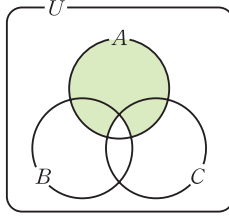
- ① $B - A = \emptyset$ ② $A \cup B = A$
③ $A \cap B^c = \emptyset$ ④ $A \cup B^c = U$
⑤ $B - (A \cap B) = \emptyset$

모의

A08 ***

오른쪽 벤다이어그램의 색칠한
부분을 나타내는 집합은?

(단, U 는 전체집합) (3점)



- ① $A - (B \cap C)$
- ② $A - (B - C)$
- ③ $A - (C - B)$
- ④ $A \cap (B \cup C)^c$
- ⑤ $A - (B^c \cup C^c)$

모의

A09 ***

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(A)=24, n(B)=18, n(A \cup B)=30$$

일 때, $n(B \cap A^c)$ 의 값은? (3점)

- ① 4 ② 6 ③ 8
- ④ 10 ⑤ 12

모의

A10 ***

100명의 학생에게 국어와 수학의 선호도를 조사하였더니
국어를 좋아하는 학생이 68명, 수학을 좋아하는 학생이
53명, 두 과목 중 어느 한 과목도 좋아하지 않는 학생이
23명이었다. 이때, 한 과목만 좋아하는 학생의 수는? (4점)

- ① 23 ② 28 ③ 33
- ④ 38 ⑤ 43

모의

A11 ***

어느 학급의 학생 30명을 대상으로 주말에 먹은 음식
조사를 하였다. 치킨을 먹은 학생이 12명, 피자를 먹은
학생이 16명, 햄버거를 먹은 학생이 15명이었고 세 음식
중 한 음식만 먹은 학생이 21명이었다. 이 학급의 모든
학생이 지난 주말에 치킨, 피자, 햄버거 중 적어도 한
음식을 먹었다고 할 때, 세 가지 음식을 모두 먹은 학생의
수는? (4점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

모의

A12 ***

실수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(A)=8, n(B)=7, n(A \cap B) \geq 2$$

일 때, $n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (4점)

- ① 9 ② 12 ③ 18
- ④ 21 ⑤ 27

서술형

모의

A13 ***

두 집합

$$A = \{-1, 2, a^2 - 3\}, B = \{1, a + 1, b - 1\}$$

에 대하여 $A=B$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을
구하는 과정을 서술하시오. (8점)



차 례

I 집합과 명제

A 집합	2
B 명제	44

II 함수

C 함수	84
D 유리식과 유리함수	133
E 무리식과 무리함수	181

III 순열과 조합

F 경우의 수	210
G 순열과 조합	232

Special 내신+학평 대비 단원별 모의고사

A 집합	271
B 명제	274
C 함수	279
D 유리식과 유리함수	282
E 무리식과 무리함수	286
F 경우의 수	290
G 순열과 조합	293

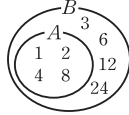
개념 확인 문제

- A 01** 정답 ○
- A 02** 정답 ×
- A 03** 정답 ○
- A 04** 정답 ∈
- A 05** 정답 ∈
- A 06** 정답 ∉
- A 07** 정답 ∉
- A 08** 정답 ∈
- A 09** 정답 ∉
- A 10** 정답 {9, 18, 27, 36, 45}
- A 11** 정답 {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}
- A 12** 정답 $\{x|x \text{는 짝수}\}$
- A 13** 정답 $\{x|x \text{는 } 50 \text{보다 작은 소수}\}$
- A 14** 정답 무
- A 15** 정답 유
- A 16** 정답 무
- A 17** 정답 1
- A 18** 정답 4
- A 19** 정답 0
- A 20** 정답 $B \subset A$
 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 양의 배수}\} = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$
 $B = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 양의 배수}\} = \{8, 16, 24, 32, \dots\}$
 $\therefore B \subset A$
- A 21** 정답 $A=B$
- A 22** 정답 $A \subset B$
 $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
- A 23** 정답 $\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$
- A 24** 정답 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$
- A 25** 정답 $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}, \{1, 3, 9\}$

- A 26** 정답 $A=B$
- A 27** 정답 $A \neq B$
 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $B = \{x|x \text{는 음이 아닌 정수}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $\therefore A \neq B$
- A 28** 정답 $A=B$
- A 29** 정답 $\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}$
- A 30** 정답 64
집합 A 의 원소의 개수가 6이므로
(집합 A 의 부분집합의 개수) $= 2^6 = 64(\text{개})$
- A 31** 정답 63
(집합 A 의 진부분집합의 개수) $= 2^6 - 1$
 $= 64 - 1$
 $= 63(\text{개})$
- A 32** 정답 32
집합 A 의 부분집합 중 d 를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{6-1} = 2^5 = 32(\text{개})$
- A 33** 정답 16
집합 A 의 부분집합 중 a, e 를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{6-2} = 2^4 = 16(\text{개})$
- A 34** 정답 {3, 5}
- A 35** 정답 $\{x|x \text{는 } 16 \text{의 양의 배수}\}$
- A 36** 정답 {6, 18}
 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 6 \text{의 양의 배수}\} = \{6, 12, 18\}$
 $B = \{x|x \text{는 } 18 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
 $\therefore A \cap B = \{6, 18\}$
- A 37** 정답 {1, 4, 6}
- A 38** 정답 {1, 2, 3, 5, 10, 15}
- A 39** 정답 $\{x|x \text{는 실수}\}$
- A 40** 정답 {1, 2, 4, 6, 8, 10}
- A 41** 정답 {1, 3, 5, 7, 9}
 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ 이므로
 $B = \{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 $\therefore B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- A 42** 정답 {3, 4, 6, 7, 8, 9}
 $C = \{x|x \text{는 } 10 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$
 $\therefore C^c = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$
- A 43** 정답 {1, 2, 4, 20}
- A 44** 정답 $\{b, d, e\}$

A 45 정답 ∅

$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\}$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 양의 약수}\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
 $\therefore A - B = \emptyset$



A 46 정답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

A 47 정답 (가) $A^c \cup B^c$ (나) 결합법칙 (다) U

A 48 정답 $\{c, e\}$

$(C \cap A) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cup B)$
 이때, $A \cup B = \{a, c\} \cup \{a, d, e\} = \{a, c, d, e\}$ 이므로
 $C \cap (A \cup B) = \{b, c, e\} \cap \{a, c, d, e\} = \{c, e\}$

A 49 정답 ∅

A 50 정답 $A \cap B$

A 51 정답 $A - B$

A 52 정답 $B - C$

A 53 정답 5

A 54 정답 3

A 55 정답 3

A 56 정답 2

A 57 정답 5

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 이므로
 $29 = 14 + 16 + 20 - 10 - 9 - 7 + n(A \cap B \cap C)$
 $\therefore n(A \cap B \cap C) = 5$

A 58 정답 10

학생 전체의 집합을 U , 음악을 좋아하는 학생의 집합을 A , 미술을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 40, n(A) = 23, n(B) = 15$
 음악과 미술 어느 것도 좋아하지 않는 학생이 12명이므로
 $n(A^c \cap B^c) = 12$ 에서
 $n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A^c \cap B^c) = 40 - 12 = 28$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $28 = 23 + 15 - n(A \cap B)$
 $\therefore n(A \cap B) = 10$
 따라서 음악과 미술 둘 다 좋아하는 학생 수는 10(명)이다.

A 59 정답 13

음악만 좋아하는 학생의 집합은 $A - B$ 이므로
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 23 - 10 = 13$
 따라서 음악만 좋아하는 학생 수는 13(명)이다.



내신+학평 유형 스토리



A 60 정답 ②

집합의 뜻과 표현 방법

(정답 공식: 집합의 원소의 기준을 생각해 본다.)

단서 원소인지 아닌지의 기준이 명확해야 집합이라 할 수 있어.

다음 중 **집합**이 아닌 것은?

- ① 8의 약수의 모임
- ② 작은 홀수의 모임
- ③ 10보다 작은 짝수의 모임
- ④ 키가 160 cm인 사람의 모임
- ⑤ A고등학교 수학 교사의 모임

1st 집합의 원소의 기준이 명확한지 체크해봐.

② '작은'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없다.
 따라서 집합이 아닌 것은 ②이다.
 → 얼마나 작아야 작은 수라 할 수 있는지 그 기준이 명확하지 않아.

A 61 정답 ③

집합의 뜻과 표현 방법

(정답 공식: 집합의 원소의 기준을 생각해 본다.)

다음 [보기] 중 **집합**인 것은 모두 몇 개인가?

[보기]

- ㄱ. 3보다 작은 양의 짝수의 모임
- ㄴ. 100에 가까운 자연수의 모임
- ㄷ. 우리나라에서 가장 높은 산의 모임
- ㄹ. 6보다 작은 소수의 모임
- ㅁ. 수학을 잘하는 학생들의 모임

단서 모임이라는 단어가 들어 있다고 해서 다 집합인 것은 아니야. 주어진 조건에 맞게 원소가 명확히 정해지는지 확인해.

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

1st 집합의 원소의 기준이 명확한 것들을 골라보자.

ㄱ. 3보다 작은 양의 짝수의 모임 $\Rightarrow \{2\}$ 이므로 집합이다.
 ㄴ. 100에 가까운 자연수의 모임
 $\Rightarrow$ '가까운'은 조건이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
 ㄷ. 우리나라에서 가장 높은 산의 모임 $\rightarrow$ 우리나라에서 '가장 높은' 산의 모임은 원소의 개수가 1개인 집합이야.
 $\Rightarrow$ 조건이 '가장 높은'으로 명확하므로 집합이다.
 ㄹ. 6보다 작은 소수의 모임 $\Rightarrow \{2, 3, 5\}$ 이므로 집합이다.
 ㅁ. 수학을 잘하는 학생들의 모임
 $\Rightarrow$ '잘하는'은 조건이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
 따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

수능 해강

* 집합의 원소의 기준이 명확하지 않은 것 알아보기

- (i) 모양을 나타내는 표현
 '예쁜', '멋진' 등
- (ii) 감정을 나타내는 표현
 '슬픈', '웃긴', '기쁜' 등

A 62 정답 ④ 집합의 뜻과 표현 방법

(정답 공식: 각 집합의 원소를 원소나열법으로 적어본다.)

다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

- ① $\{x|x \text{는 } 2 < x < 8, x \text{는 홀수}\}$ **단서** 선택지에 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내보자.
 ② $\{x|x \text{는 } 3 \leq x \leq 8, x \text{는 홀수}\}$
 ③ $\{x|x \text{는 홀수인 한 자리의 소수}\}$
 ④ $\{x|x \text{는 } 1 < x < 10, x \text{는 소수}\}$
 ⑤ $\{x|x \text{는 } 3 \leq x \leq 10, x \text{는 소수}\}$

1st 주어진 집합들을 원소나열법으로 나타내어 비교해 보.

- ①, ②, ③, ⑤ $\{3, 5, 7\}$ — 조건제시법으로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 좀 더 쉽게 구별할 수 있어.
 ④ $\{2, 3, 5, 7\}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

☆ 집합의 표현 방법

개념·공식

- ① 원소나열법
 $\Rightarrow \{a, b, c\}$ 와 같이 집합 기호 안에 모든 원소를 나열하는 방법
 ② 조건제시법
 $\Rightarrow \{x|x \text{에 대한 조건}\}$ 의 형태로 원소가 될 조건을 제시하는 방법

A 63 정답 ④ 유한집합과 무한집합

(정답 공식: 무한집합은 원소의 개수가 무한인 집합이다.)

다음 중 무한집합인 것은?

- ① $\emptyset$ **단서** 원소의 개수가 무수히 많은 것을 찾으면 돼.
 ② $\{0\}$
 ③ $\{1, 2, 3\}$
 ④ $\{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$
 ⑤ $\{x|x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\}$

1st 배수의 집합은 원소의 개수가 무한이지?

- ④ $\{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ 이므로 무한집합이다. 0이 아닌 정수의 배수의 집합은 무한집합이고, 0이 아닌 정수의 약수의 집합은 유한집합이야.

A 64 정답 ⑤ 유한집합과 무한집합

(정답 공식: 유한집합은 원소의 개수가 정해지는 집합이다.)

집합 $\{x|x \text{는 } \square\}$ 가 유한집합일 때, 다음 중 $\square$ 안에 알맞은 말은?

- ① 짝수 ② 3의 배수 ③ 정수 ④ 소수 ⑤ 10의 약수

1st $\square$ 안에 선택지의 말을 넣어서 유한집합인 것을 찾아.

- ① $\{x|x \text{는 짝수}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
 짝수는 $2k(k \text{는 정수})$ 꼴이야.
 ② $\{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$
 3의 배수는 $3k(k \text{는 정수})$ 꼴이야.
 ③ $\{x|x \text{는 정수}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 ④ $\{x|x \text{는 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ **실수** 소수의 개수는 무수히 많아.
 ⑤ $\{x|x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$ — 유한집합

A 65 정답 ②, ⑤ 유한집합과 무한집합

(정답 공식: 집합의 개수가 유한한 유한집합을 찾는다.)

다음 중 유한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $\{x|x \text{는 } 10 \text{보다 큰 짝수}\}$ **단서** 원소의 개수가 유한개여서 원소를 셀 수 있는 집합을 유한집합이라 하지? 선택지에 제시된 조건에 따라 집합을 원소나열법으로 나타내 보자.
 ② $\{x|x^2 - 4 < 0, x \text{는 정수}\}$
 ③ $\{x|x = \frac{p}{q}, p, q \text{는 정수 (단, } q \neq 0)\}$
 ④ $\{x|x \text{는 } 3 \text{으로 나눌 때 나머지가 } 2 \text{인 자연수}\}$
 ⑤ $\{x|x \text{는 } 2 \text{보다 큰 짝수인 소수}\}$

1st 주어진 집합들을 원소나열법으로 나타내어 개수가 유한개인 집합을 찾아 보.

- ① $\{12, 14, 16, \dots\} \rightarrow$ 무한집합
 ② $x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) < 0 \therefore -2 < x < 2$
 이때, x 는 정수이므로 주어진 집합은 $\{-1, 0, 1\} \rightarrow$ 유한집합
 ③ 정수 p, q (단, $q \neq 0$)에 대하여 $x = \frac{p}{q}$ 인 x 는 유리수를 뜻한다.
 즉, 주어진 집합은 유리수 전체의 집합이다. $\rightarrow$ 무한집합
 ④ $\{2, 5, 8, 11, \dots\} \rightarrow$ 무한집합
 ⑤ 2보다 큰 짝수인 소수는 없으므로 주어진 집합은 공집합이다.

이때, 공집합도 유한집합이다.

주의 원소의 개수가 하나도 없는 집합을 공집합이라 해. 이때, 공집합은 유한집합으로 정함에 유의하자.

따라서 선택지 중 유한집합은 ②, ⑤이다.

A 66 정답 ③ 집합의 원소의 개수

(정답 공식: 소수는 1과 그 자신만을 약수로 갖는 자연수이다.)

집합 $\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 원소의 개수는?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

단서 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 원소의 개수를 알 수 있지.

1st 원소나열법으로 10 이하의 소수를 구하자. [원소나열법]

집합의 원소를 모두 나열하여 나타내는 방법

10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

따라서 주어진 집합의 원소의 개수는 4이다.

A 67 정답 ③ 집합의 원소의 개수

(정답 공식: 집합의 원소의 개수를 센다.)

두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 의 원소의 개수를 각각 m, n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

단서 원소나열법으로 나타내어진 집합의 원소의 개수를 세자.

1st 원소나열법으로 표현된 집합의 원소의 개수를 구하자. [원소나열법]
 집합의 원소를 모두 나열하여 나타내는 방법

집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 은 원소의 개수가 4이므로 $m=4$

집합 $B = \{2, 3, 5\}$ 는 원소의 개수가 3이므로 $n=3$

$m+n=4+3=7$

2nd $n(A-B) = n(A \cup B) - n(B)$ 를 이용해 최댓값을 구해. $\rightarrow n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$ 도 기억하고 있지.

체험 활동 A만 신청한 학생의 집합은 $A-B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A-B) &= n(A \cup B) - n(B) \\ &= 150 - n(B) \quad (\because \text{㉔}) \\ &= 150 - n(A) + 20 \quad (\because \text{㉔}) \\ &= 170 - n(A) \end{aligned}$$

$n(A) = n(A-B) + n(A \cap B)$ 를 대입하여 정리하면

$$n(A-B) = \frac{1}{2} \{170 - n(A \cap B)\}$$

$n(A \cap B) = 0$, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A-B)$ 의 값은 최대가 되고
최댓값은 $\frac{170}{2} = 85$ 이다. $\rightarrow$ 빼는 수가 최소일 때, $n(A-B)$ 가 최대가 되는 거야.

쉬운 풀이: 미지수를 도입하여 주어진 조건을 식으로 나타내어 최댓값 구하기

전체 학생의 수 200명 중 하나 이상의 체험활동을 신청한 학생의 수는 어떤 체험 활동도 신청하지 않은 학생의 수보다 100명이 많으므로 차례로 150명, 50명이 돼.

그림에서와 같이 $n(A-B) = x$,

$n(A \cap B) = y$, $n(B-A) = z$ 라 하면

$$n(A \cup B) = x + y + z = 150 \quad \text{㉔}$$

체험 활동 A를 신청한 학생은 체험 활동 B를 신청한 학생보다 20명이 더 많으므로

$$x + y = y + z + 20, \quad z = x - 20 \quad \text{㉕}$$

한편, 각 집합의 원소의 개수는 0 이상이므로

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{㉖}$$

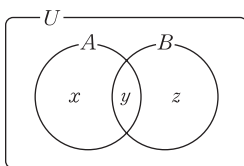
$$\text{㉔에서 } y = 150 - x - z$$

㉕, ㉖에 의하여

$$y = 150 - x - (x - 20) = 170 - 2x \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 85$$

따라서 $n(A-B)$ 의 최댓값은 85야.



A 183 정답 ④ 원소의 개수의 최댓값과 최솟값의 활용

[정답 공식:] 봉사 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 $n(A) + n(B) = 36$ 이고, $n(A \cup B) \leq 30$ 이다.

어느 학급 학생 30명을 대상으로 두 봉사 활동 A, B에 대한 신청을 받았다. 봉사 활동 A를 신청한 학생 수와 봉사 활동 B를 신청한 학생 수의 합이 36일 때, 봉사 활동 A, B를 모두 신청한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

$M+m$ 의 값은? **단서** 봉사 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 봉사 활동 A, B를 모두 신청한 학생의 집합은 $A \cap B$ 야.



봉사 활동 A



봉사 활동 B

① 18

② 20

③ 2

④ 24

⑤ 26

1st 주어진 조건을 집합을 이용해서 나타내 보자.

봉사 활동 A, B를 신청한 학생을 원소로 하는 집합을 각각 A, B라 하면 봉사 활동 A를 신청한 학생 수와 봉사 활동 B를 신청한 학생 수의 합이 36이므로 $n(A) + n(B) = 36$

2nd 봉사 활동 A, B를 모두 신청한 학생 수는 $n(A \cap B)$ 의 값과 같아.

$$\begin{aligned} \text{봉사 활동 A, B를 모두 신청한 학생 수는 } n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ n(A \cap B) &= 36 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

봉사 활동 A, B를 모두 신청한 학생의 집합은 $A \cap B$ 야.
결국 구하는 것은 $n(A \cap B)$ 의 최댓값과 최솟값이지.

학급의 학생 수가 30이므로 $n(A \cup B) \leq 30$ 에서

$$36 - n(A \cap B) \leq 30$$

$$\therefore n(A \cap B) \geq 36 - 30 = 6 \quad \text{㉔}$$

또, $n(A \cap B) \leq n(A \cup B)$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq 36 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) \leq 18 \quad \text{㉕}$$

$$\text{㉔, ㉕에서 } 6 \leq n(A \cap B) \leq 18 \quad n(A) + n(B) = 36 \text{이므로}$$

$$\text{따라서 } M = 18, m = 6 \text{이므로 } M + m = 18 + 6 = 24$$

봉사 활동을 신청한 학생 수는 학급 전체 학생 수 이하여야 해.

합정

봉사 활동을 아예 신청하지 않은 학생이 있을 수도 있다는 것을 잊으면 안 돼.



서술형 스토리

A 184 정답 17 집합 사이의 포함관계가 성립하도록 하는 미지수 구하기

[정답 공식:] 주어진 조건을 만족시키는 a, b를 차례로 구한다.)

세 집합 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, a^2, 4\}$, $C = \{2, -a, a, b\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. **단서** $A \subset B$ 이므로 $1 \in B$ 이어야 해. 이를 이용하여 a의 값을 구한 후 $B \subset C$ 임을 이용하여 b의 값을 차례로 구하자.

1st $A \subset B$ 를 이용하여 a의 값을 구하자.

$$A \subset B \text{이므로 } 1 \in B \Rightarrow a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1 \quad \text{㉔}$$

2nd $B \subset C$ 를 이용하여 b의 값을 구하자.

$$a = \pm 1 \text{일 때,}$$

$$B = \{1, 2, 4\}, C = \{-1, 1, 2, b\} \text{이고 } B \subset C \text{이므로 } b = 4 \quad \text{㉕}$$

3rd $a^2 + b^2$ 의 값을 구하자. $C = \{2, -a, a, b\}$ 이므로 $a = 1$ 또는 $a = -1$ 이어도 집합 C의 원소는 변함이 없지.

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + 16 = 17 \quad \text{㉖}$$

[채점 기준표]

㉔ a의 값을 구한다.	40%
㉕ b의 값을 구한다.	40%
㉖ $a^2 + b^2$ 의 값을 구한다.	20%

A 185 정답 10 주어진 조건을 만족시키는 집합

[정답 공식:] $A \cap B = \{1\}$ 로부터 $a^2 - 3a + 3 = 1$ 을 만족시키는 a의 값을 찾고 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구한다.

단서 1 $1 \in A$ 이므로 $a^2 - 3a + 3 = 1$ 임을 이용하자.
두 집합 $A = \{0, 3, a^2 - 3a + 3\}$, $B = \{a-1, a, a+2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하는 과정을 서술하시오. **단서 2** $1 \in A$ 이고 $1 \in B$ 여야 해.

1st $1 \in A$ 임을 이용하여 a 의 값을 구하자.

$A \cap B = \{1\}$ 이므로 $1 \in A$ 이다.
 즉, $a^2 - 3a + 3 = 1$ 이므로 $A = \{0, 1, 3\}$ 이야.
 $a^2 - 3a + 2 = 0, (a-1)(a-2) = 0$
 $\therefore a = 1$ 또는 $a = 2 \dots \textcircled{1}$

2nd a 의 값에 따라 집합 B 를 구하여 조건에 맞는지 체크해 보자.

(i) $a = 1$ 일 때, $B = \{0, 1, 3\}$ 이므로
 $A \cap B = \{0, 1, 3\}$ $\rightarrow a-1=1-1=0$
 $a+2=1+2=3$
 이것은 조건에 맞지 않는다.
 (ii) $a = 2$ 일 때, $B = \{1, 2, 4\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1\}$ $\rightarrow a-1=2-1=1$
 $a+2=2+2=4$
 이것은 조건에 맞는다. $\dots \textcircled{II}$

3rd 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구해.

(i), (ii)에서 $a = 2$ 이고 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은
 $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \dots \textcircled{III}$

[채점 기준표]

① $1 \in A$ 임을 이용하여 a 의 값을 구한다.	40%
② $a = 1, a = 2$ 인 경우를 각각 따진다.	40%
③ 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구한다.	20%

A 186 정답 10

[정답 공식: 집합 A 의 원소를 모두 구해 조건을 만족시키는 집합 B 의 개수를 구한다.]

단서 1 집합 A 를 원소나열법으로 나타내.

집합 $A = \{x | x \text{는 } 40 \text{의 양의 약수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 집합 B 의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $B \subset A$ (나) $n(B) = 5$ **단서 2** 집합 A 의 부분집합인 집합 B 의 원소의 조건을 정리해야겠지?
 (다) $5 \in B, 8 \in B, 20 \notin B$

1st 조건 (가), (다)에 의하여 집합 B 의 조건을 체크하자.

집합 B 는 5, 8은 반드시 원소로 갖고, 20은 원소로 갖지 않는 집합
 $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ 의 부분집합이다.
 이때, 조건 (나)에서 집합 B 의 원소의 개수가 5이므로
 집합 B 의 5, 8을 제외한 나머지 원소는
 1, 2, 4, 10, 40 중 3개이다. $\dots \textcircled{I}$

2nd 집합 B 의 원소 중 5, 8을 제외한 나머지 원소들이
 될 수 있는 경우를 생각해 보자.

이들 5개 중 서로 다른 3개를 순서에 관계없이 선택하는 방법은

주의 5개 중 3개를 선택하는 방법을 빼먹지 않고 세는 것이 중요해.

1, 2, 4 / 1, 2, 10 / 1, 2, 40 / 1, 4, 10 / 1, 4, 40 / 1, 10, 40 /
 2, 4, 10 / 2, 4, 40 / 2, 10, 40 / 4, 10, 40의 10가지이다. $\dots \textcircled{II}$
 $\rightarrow$ 이 10가지에 5, 8을 넣어 원소의 개수가 5인 집합을 만들면 이 집합이 B 가 되는 거야.

3rd 집합 B 의 개수를 구하자.

따라서 집합 B 의 개수는 10이다. $\dots \textcircled{III}$

[채점 기준표]

① 집합 B 의 원소에 대한 조건을 구한다.	50%
② 집합 B 의 원소가 될 수 있는 경우를 모두 구한다.	30%
③ 집합 B 의 개수를 구한다.	20%

A 187 정답 12

[정답 공식: 조건 (가)를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구한다.]

두 집합 $A = \{1, 4, 6, 10, 12, 15\}$, $B = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

단서 1 $B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 임을 알 수 있어.
단서 2 집합 A 와 공통인 원소가 2개인 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하자.
 (가) $n(X \cap A) = 2$ (나) $B \cup X = B$

1st 집합 B 를 원소나열법으로 나타내고, 집합 X 의 조건을 체크하자.

$B = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 양의 짝수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

조건 (나)에서 $B \cup X = B$, 즉 $X \subset B$ 이고, $n(X \cap A) = 2$ 이므로 집합 X 는 4, 6, 10 중 두 원소만을 포함하는 집합 B 의 부분집합이다. $\dots \textcircled{I}$

2nd 조건에 따라 경우를 나누고, 각각에서 집합 X 의 개수를 구하자.

(i) 4, 6을 원소로 갖고 10을 원소로 갖지 않을 때, $2^{5-2-1} = 4$ (개)

(ii) 4, 10을 원소로 갖고 6을 원소로 갖지 않을 때, $2^{5-2-1} = 4$ (개)

(iii) 6, 10을 원소로 갖고 4를 원소로 갖지 않을 때, $2^{5-2-1} = 4$ (개) $\dots \textcircled{II}$

3rd 집합 X 의 개수를 구하자.
 따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $4 \times 3 = 12$ (개) $\dots \textcircled{III}$

[채점 기준표]

① 집합 X 의 원소에 대한 조건을 구한다.	40%
② 각 경우에 대한 집합 B 의 부분집합 X 의 개수를 구한다.	40%
③ 집합 X 의 개수를 구한다.	20%

A 188 정답 3

[정답 공식: a 의 값을 경우를 나누어 구한 뒤 $A = B$ 를 만족시키는 값을 찾는다.]

어떤 상수 a 에 의해 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$,
 $B = \{1, 5-a, a^2-2a\}$ 가 결정된다. $A = B$ 이기 위한 a 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. **단서** $A = B$ 이므로 $2 \in B$ 이고 $a \in B$ 이어야 해.

1st $A = B$ 이기 위한 조건을 나눠보자. $\rightarrow A$ 의 원소 1에 대하여 $1 \in B$ 이므로 $A = B$ 이려면 $2 \in B$ 이고 $a \in B$ 이어야 한다. 2 와 a 만 B 의 원소임을 확인하면 돼. a 의 값에 따라 집합이 결정되므로 $a = 5 - a$ 이거나 $a = a^2 - 2a$ 가 되어야 한다. $\dots \textcircled{I}$

2nd 각각의 경우에 따라 A, B 를 구하고 $A = B$ 인지 체크하자.

(i) $a = 5 - a$, 즉 $a = \frac{5}{2}$ 일 때, $A = \{1, 2, \frac{5}{2}\}$, $B = \{1, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}\}$ 이므로
 $A \neq B \dots \textcircled{II}$

(ii) $a = a^2 - 2a$ 일 때, $a^2 - 3a = 0, a(a-3) = 0 \therefore a = 0$ 또는 $a = 3$
 i) $a = 0$ 이면 $A = \{1, 2, 0\}$, $B = \{1, 5, 0\}$ 이므로 $A \neq B$
 ii) $a = 3$ 이면 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이므로 $A = B$

3rd a 의 값을 구하자.

따라서 $A = B$ 인 a 의 값은 3이다. $\dots \textcircled{III}$

[채점 기준표]

① $A = B$ 일 조건을 구한다.	20%
② $a = 5 - a$ 일 때, $A \neq B$ 임을 보인다.	40%
③ $a = a^2 - 2a$ 일 때, $A = B$ 인 a 의 값을 구한다.	40%

A 189 정답 {1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36} 여집합과 차집합

정답 공식: 집합 A의 원소는 36의 약수여야 하므로, 조건을 만족시키는 두 집합 B, C를 각각 구해 B-C를 구한다.

단서 1 집합 A의 원소도 모두 자연수겠지?

자연수 전체의 집합 N의 부분집합 A가 조건

$$x \in A \text{ 이면 } \frac{36}{x} \in A \quad \text{단서 2 } \frac{36}{x} \text{ 이 자연수여야 하므로 } x \text{ 는 36의 양의 약수야.}$$

를 만족시킨다. 집합 A 중에서 원소의 개수가 가장 많은 집합을 B, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 C라고 할 때, 집합 B-C를 구하는 과정을 서술하시오. (단, $A \neq \emptyset$)

1st x 와 $\frac{36}{x}$ 이 모두 자연수가 되는 x 의 조건을 찾아보자.

집합 A의 원소는 자연수이고 $x \in A$ 이면 $\frac{36}{x} \in A$

이므로 x 가 될 수 있는 수는 36의 양의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다. ... ①

2nd 집합 B, C를 구하자.

$$\therefore B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}, C = \{6\} \dots \text{II}$$

1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9는 각각 항상

3rd 집합 B-C를 구하자. 한 집합 안에 원소 같이 포함되어야 함을 명심해.

$$\therefore B-C = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\} \dots \text{III}$$

주의
 $A \neq \emptyset$ 이라는 조건이 없었
다면 원소의 개수가 가장 적
은 집합은 공집합이야.

[채점 기준표]

① x 가 될 수 있는 수를 구한다.	50%
II 두 집합 B, C를 각각 구한다.	30%
III 집합 B-C를 구한다.	20%

A 190 정답 33 배수와 약수의 집합의 연산

정답 공식: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 와 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 를 이용한다.

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 의 부분집합 $A_n = \{x | x \text{ 는 } n \text{의 배수, } n \text{ 은 자연수}\}$ 라고 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

단서 $A_3 \cup A_4$ 를 하나의 집합으로 나타내기가 쉽지 않으므로 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 를 분배법칙을 이용하여 전개해 보.

1st 구해야 하는 집합을 분배법칙을 이용하여 정리하자.

$$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) \leftarrow \text{분배법칙}$$

2nd $A_m \cap A_n$ 은 m 과 n 의 공배수들의 집합임을 이용하자.

이때, 2와 3의 최소공배수는 6이므로 $A_2 \cap A_3 = A_6$

2와 4의 최소공배수는 4이므로 $A_2 \cap A_4 = A_4$

따라서 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$ 이다. ... ①

3rd 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수를 구하자.

$$\begin{aligned} \therefore n(A_6 \cup A_4) &= n(A_6) + n(A_4) - n(A_6 \cap A_4) \quad [\text{집합의 원소의 개수}] \\ &= n(A_6) + n(A_4) - n(A_{12}) \quad n(A \cup B) \\ &= 16 + 25 - 8 = 33 \dots \text{II} \quad = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &\rightarrow \text{1부터 100까지의 자연수 중 6의 배수의 개수는 } \frac{100}{6} = 16.66 \dots \text{이므로 16개} \end{aligned}$$

교집합이 어
떤 집합인지
헛갈린다면
 A_n 의 원소
를 원소나열
법으로 나타
내보.

[채점 기준표]

① 집합의 연산법칙을 이용하여 주어진 집합을 간단히 정리한다.	60%
II 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수를 구한다.	40%

A 191 정답 16 부분집합의 개수

정답 공식: $A^c \subset B$ 를 만족시키는 집합 B의 개수를 구한다.

전체집합 $U = \{x | x \text{ 는 10 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $A \cup B = U$ 를 만족시키는 U의 부분집합 B의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

단서 $A \cup B = U$ 가 되기 위한 집합 B의 원소의 조건을 생각해 보.

1st 전체집합 U를 원소나열법으로 나타내자.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \dots \text{I}$$

2nd $A \cup B = U$ 를 만족시키는 집합 B의 조건을 체크하자.

$A \cup B = U$ 이므로 집합 B는 $A^c = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ 의 원소를 반드시 포함해야 한다. ... II

3rd 집합 B의 개수를 구하자.

따라서 구하는 집합 B는 원소 1, 4, 6, 8, 9, 10을 반드시 포함하는 집합 U의 부분집합이므로 구하는 집합 B의 개수는 $2^{10-6} = 2^4 = 16$ (개) ... III

집합 B는 집합 A의 부분집합에 집합 A^c 의 원소를 모두 포함시키면 되므로 구하는 집합 B의 개수는 결국 집합 A의 부분집합의 개수와 같다.

[채점 기준표]

① 전체집합 U를 원소나열법으로 나타낸다.	20%
II $A \cup B = U$ 를 만족시키는 집합 B에 대하여 서술한다.	30%
III 집합 B의 개수를 구한다.	50%

A 192 정답 16 집합의 연산법칙

정답 공식: 집합의 연산법칙을 이용하여 식을 간단히 정리하고, 주어진 조건을 이용해 집합 B의 원소를 구한다.

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B에 대하여

단서 집합의 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리해.

$$A^c \cup B^c = \{1, 4, 6, 7\}, (A-B)^c \cap \{B \cap (A \cap B)^c\} = \{6\}$$

이 성립할 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하는 과정을 서술하시오.

1st 첫 번째 식을 정리하여 집합 $A \cap B$ 를 구하자.

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \text{ 이므로 } (A \cap B)^c = \{1, 4, 6, 7\}$$

$$\therefore A \cap B = U - (A \cap B)^c = \{2, 3, 5\} \dots \text{I}$$

2nd 집합의 연산법칙을 이용하여 두 번째 식을 정리하자.

$$\begin{aligned} (A-B)^c \cap \{B \cap (A \cap B)^c\} &= (A-B)^c \cap \{B \cap (A^c \cup B^c)\} \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= (A \cap B^c)^c \cap \{(B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)\} \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= (A^c \cup B) \cap \{(B \cap A^c) \cup \emptyset\} \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= (B \cup A^c) \cap (A^c \cap B) \leftarrow \text{교환법칙} \\ &= \{(B \cup A^c) \cap A^c\} \cap B \leftarrow \text{결합법칙} \end{aligned}$$

이때, $A^c \subset (B \cup A^c)$ 이므로 $(B \cup A^c) \cap A^c = A^c$

$$\therefore \{(B \cup A^c) \cap A^c\} \cap B = A^c \cap B = B - A$$

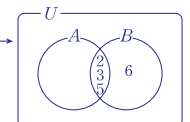
즉, $B - A = \{6\} \dots \text{II}$ 이다. ... II

3rd 집합 B의 모든 원소의 합을 구하자.

$$\text{I, II에서 } B = \{2, 3, 5, 6\}$$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $2 + 3 + 5 + 6 = 16 \dots \text{III}$

주어진 식을 간단히 하는 각 과정에서 무슨 법칙을 사용할 지 생각하면서 정리해야 실수가 없어.



[채점 기준표]

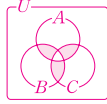
① 첫 번째 식으로부터 집합 $A \cap B$ 를 구한다.	50%
② 두 번째 식으로부터 집합 $B - A$ 를 구한다.	20%
③ 집합 B 를 구하여 모든 원소의 합을 구한다.	30%

A 193 정답 27 유한집합의 원소의 개수

[정답 공식: 주어진 조건에 해당하는 집합의 원소의 개수를 구하고, 벤다이어그램을 이용하여 세 집합 A, B, C 의 각 부분의 원소의 개수를 구한다.]

100명의 학생에게 1번, 2번, 3번 세 개의 수학 문제를 풀게 하였다. 그 중에서 1번 문제를 맞힌 학생이 48명, 2번 문제를 맞힌 학생이 52명, 3번 문제를 맞힌 학생이 45명, 1, 2, 3번 세 문제를 모두 맞힌 학생은 13명, 1, 2, 3번 세 문제 중 한 문제라도 맞히지 못한 학생은 8명이라고 한다. 1, 2, 3번 세 문제 중 두 문제만을 맞힌 학생 수를 구하는 과정을 서술하시오.

단서 1, 2, 3번 문제를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면 세 문제 중 두 문제만을 맞힌 학생 수는 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분에 속하는 원소의 개수와 같다.



1st 주어진 조건을 집합으로 나타내보자.

학생 전체의 집합을 U 라 하고, 1, 2, 3번 문제를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$$n(U)=100, n(A)=48, n(B)=52, n(C)=45$$

$$n(A \cap B \cap C)=13, n(A^c \cap B^c \cap C^c)=8 \cdots \text{①}$$

2nd $n(A \cup B \cup C)$ 로부터 $n(A \cap B) + (B \cap C) + n(C \cap A)$ 를 구하자.

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cup B \cup C) &= n(U) - n((A \cup B \cup C)^c) \\ \text{[여집합의 원소의 개수]} \quad n(X^c) &= n(U) - n(X) = n(U) - n(A^c \cap B^c \cap C^c) \\ &= 100 - 8 = 92 \cdots \text{②} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

에서 **실수** < 집합 3개의 합집합의 원소의 개수 공식을 확실하게 알고 있어야 해.

$$92 = 48 + 52 + 45 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 13$$

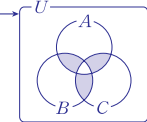
$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 66 \cdots \text{③}$$

3rd 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수를 구하자.

따라서 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수는

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$$

$$\text{이므로 구하는 학생 수는 } 66 - 3 \times 13 = 27(\text{명}) \cdots \text{④}$$



[채점 기준표]

① 주어진 조건을 집합으로 나타낸다.	30%
② $n(A \cup B \cup C)$ 를 구한다.	20%
③ $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$ 를 구한다.	20%
④ 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수를 구한다.	30%

수능 해강

* 유한집합의 원소의 개수의 활용 문제 푸는 순서 알아보기

- 문제에서 주어진 요소들을 집합으로 지정한다.
- 문제의 조건에 맞게 원소의 개수에 관한 식을 세운다.
- 구하려는 것을 벤다이어그램을 이용하여 나타내고 원소의 개수에 관한 식을 세운다.
- 세운 식들을 정리하며 구하는 것을 계산한다.



1등급 고난도 스토리

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 194 정답 ③ 유한집합의 원소의 개수

[정답 공식: 두 집합 A, B 가 서로소이면 $A \cap B = \emptyset$ 이고 서로소가 아니면 $A \cap B \neq \emptyset$ 이다.]

9 이하의 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를 **단서 1** 따라야 하는 집합은 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$ 로 9개라는 거야.

$$A_k = \{x | k-1 \leq x \leq k+1, x \text{는 실수}\}$$

라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

- $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$ **단서 2** 두 집합 A_i, A_m 의 공통 원소가 있는지만 확인하면 돼
- 9 이하의 두 자연수 l, m 에 대하여 $|l-m| \leq 2$ 이면 두 집합 A_l 과 A_m 은 서로소가 아니다.
- 모든 A_k 와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 4이다.

- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\neg, \neg$
 ④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg, \neg$

1st 세 집합 A_1, A_2, A_3 의 교집합을 구해.

세 집합을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

$$\neg, A_1 = \{x | 0 \leq x \leq 2\}, A_2 = \{x | 1 \leq x \leq 3\},$$

$$A_3 = \{x | 2 \leq x \leq 4\} \text{이므로}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$= \{x | 0 \leq x \leq 2\} \cap \{x | 1 \leq x \leq 3\} \cap \{x | 2 \leq x \leq 4\} = \{2\} \text{ (참)}$$



따라서 세 집합 A_1, A_2, A_3 의 교집합은 $\{2\}$ 임을 알 수 있어.

2nd $|l-m| \leq 2$ 일 때, $A_l \cap A_m$ 을 구해.

l, m 은 9 이하의 자연수이고 $|l-m| \leq 2$ 이므로 $|l-m|$ 의 값은 0 또는 1 또는 2야.

$\neg, l \leq m \cdots (\star)$ 이라 하면

(i) $|l-m|=0$ 일 때,

$$m=l \text{이므로 } A_m = A_l$$

$$\therefore A_l \cap A_m = A_l = \{x | l-1 \leq x \leq l+1\} \neq \emptyset$$

(ii) $|l-m|=1$ 일 때,

$$m=l+1 \text{이므로 } A_m = A_{l+1} = \{x | l \leq x \leq l+2\}$$

$$\text{이때, } A_l = \{x | l-1 \leq x \leq l+1\} \text{이므로}$$

$$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+1} = \{x | l \leq x \leq l+1\} \neq \emptyset$$

(iii) $|l-m|=2$ 일 때,

$$m=l+2 \text{이므로 } A_m = A_{l+2} = \{x | l+1 \leq x \leq l+3\}$$

$$\text{이때, } A_l = \{x | l-1 \leq x \leq l+1\} \text{이므로}$$

$$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+2} = \{l+1\} \neq \emptyset$$

(i)~(iii)에 의하여 $|l-m| \leq 2$ 이면 두 집합 A_l 과 A_m 은 서로소가 아니다. (참)

3rd 조건을 만족시키고 원소의 개수가 최소일 때의 집합을 구해 보.

$$\neg, A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \{n+1\} \text{이므로}$$

9 이하의 자연수 n 에 대하여

$$A_n = \{x | n-1 \leq x \leq n+1\}, A_{n+1} = \{x | n \leq x \leq n+2\},$$

$$A_{n+2} = \{x | n+1 \leq x \leq n+3\} \text{이므로 세 집합 } A_n, A_{n+1}, A_{n+2} \text{의 공통 원소는 } n+1 \text{ 밖에 없어.}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\},$$

$$A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \{5\},$$

$$A_7 \cap A_8 \cap A_9 = \{8\}$$

따라서 모든 A_k 와 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합은

$$\{2, 5, 8\} \text{이고 이 집합의 원소의 개수는 3이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

* (★)에서 $l > m$ 일 때, $A_l \cap A_m = \emptyset$ 인지 아닌지 확인하기

(★)에서 $l \leq m$ 일 때를 따져봤으니 $l > m$ 일 때도 따져보자.

(i) $|l-m|=1$ 일 때,

$$l=m+1 \text{이므로 } A_l = A_{m+1} = \{x \mid m \leq x \leq m+2\}$$

$$\text{이때, } A_m = \{x \mid m-1 \leq x \leq m+1\} \text{이므로}$$

$$A_l \cap A_m = A_{m+1} \cap A_m = \{x \mid m \leq x \leq m+1\} \neq \emptyset$$

(ii) $|l-m|=2$ 일 때,

$$l=m+2 \text{이므로 } A_l = A_{m+2} = \{x \mid m+1 \leq x \leq m+3\}$$

$$\text{이때, } A_m = \{x \mid m-1 \leq x \leq m+1\} \text{이므로}$$

$$A_l \cap A_m = A_{m+2} \cap A_m = \{m+1\} \neq \emptyset$$

(i)~(ii)에 의하여 $|l-m| \leq 2$ 이면 두 집합 A_l 과 A_m 은 서로소가 아니야.

(ii) $3 \in A_k \cap B^C$ 일 때

$$x=3, y-k=10 \text{이고}$$

$$y=10+k \leq 20 \quad \therefore k \leq 10$$

(iii) $6 \in A_k \cap B^C$ 일 때 $\therefore k \leq 15$
또 위의 (i)의 결과에서 $k \leq 5$ 이면 $A_k \cap B^C$ 은 2를 원소로 가지지.

$$x=6, y-k=5 \text{이고}$$

$$y=5+k \leq 20 \quad \therefore k \leq 15 \quad \text{(i), (ii)의 결과에서 } k \leq 5 \text{이면 } A_k \cap B^C \text{은 2를 원소로 가지게 되고 } 5 < k \leq 10 \text{이면 } A_k \cap B^C \text{은 3을 원소로 가지는 거야.}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$k \leq 5 \text{일 때, } A_k \cap B^C = \{2, 3, 6\}$$

$$5 < k \leq 10 \text{일 때, } A_k \cap B^C = \{3, 6\}$$

$$10 < k \leq 15 \text{일 때, } A_k \cap B^C = \{6\}$$

즉, $n(A_k \cap B^C) = 1$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위는 $10 < k \leq 15$

따라서 구하는 자연수 k 는 11, 12, 13, 14, 15로 5개이다.

A 195 정답 ② 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

(정답 공식: 두 집합 A, B에 대하여 $x \in A \cap B^C$ 은 $x \in A$ 이고 $x \notin B$ 이다.)

전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합

$$A_k = \{x \mid x(y-k) = 30, y \in U\} \quad \text{단서 1 } x, y \text{가 자연수이고 집합 } A_k \text{의 원소가 되는 조건을 보면 } x \text{가 } 30 \text{의 약수가 되어야 함을 알 수 있어.}$$

$$B = \left\{x \mid \frac{30-x}{5} \in U\right\}$$

단서 2 집합 B에서 $\frac{30-x}{5} \in U$, 즉 $30-x$ 가 5의 배수가 되어야 함을 알아야 해.

에 대하여 $n(A_k \cap B^C) = 1$ 이 되도록 하는 모든 자연수 k 의 개수는?

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

1st 집합 A_k 를 구하자.

집합 A_k 는 전체집합 U 의 부분집합이므로 x 는 20 이하의 자연수이고 $y-k$ 는 30의 약수이다.

$y \in U$ 이므로 $y-k < 30$ 이고

$x \neq 1$

또, $x \in U$ 이므로 $x \neq 30$

함정

만약 $x=10$ 이면 $y-k=30$ 을 만족시켜야 해. 그런데 y 의 값에 1, 2, 3, ..., 30을 대입하면 k 의 값은 각각 -29, -28, -27, ..., 0이므로 $x(y-k)=30$ 을 만족시키는 자연수 k 의 값이 존재하지 않게 돼.

그리고 $x=30$ 일 때는 $\frac{30-30}{5} = 0 \notin B (\subset U)$

$y-k$ 와 x 사이의 관계는 다음 표와 같다.

x	2	3	5	6	10	15
$y-k$	15	10	6	5	3	2

$$\therefore A_k \subset \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$$

2nd 집합 B를 구하고 $A_k \cap B^C$ 을 살펴보자.

$$\frac{30-x}{5} \in U \text{ 이려면 } 30-x=5l \quad (l=1, 2, \dots)$$

즉, $30-x$ 는 5의 배수이므로

$$B = \{5, 10, 15, 20\}$$

$\therefore A_k \cap B^C \subset \{2, 3, 6\}$ 에 대하여

3rd $n(A_k \cap B^C) = 1$ 이 성립하는 자연수 k 의 개수를 구하자.

$x \in A_k \cap B^C$ 이면 $x \in A_k$ 이고 $x \in B^C$ 이다.

그리고, B^C 의 원소는 구체적으로 알 수 있기 때문에 A_k 의 원소에 대하여 확인하자.

(i) $2 \in A_k \cap B^C$ 일 때

$$x=2, y-k=15 \text{이고}$$

$$y=15+k \leq 20 \quad \therefore k \leq 5$$

A 196 정답 33 유한집합의 원소의 개수

(정답 공식: 주어진 조건에 해당하는 집합의 원소의 개수를 구하고, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 를 이용해 수학문제집 A를 구매한 학생의 수를 계산한다.)

어느 고등학교 학생들을 대상으로 수학문제집 A, B, C의 구매 여부에 대하여 조사한 결과가 다음과 같다.

(가) A와 B를 모두 구매한 학생은 15명, B와 C를 모두 구매한 학생은 12명, C와 A를 모두 구매한 학생은 11명이다.

(나) A와 B 중 적어도 하나를 구매한 학생은 55명, B와 C 중 적어도 하나를 구매한 학생은 54명, C와 A 중 적어도 하나를 구매한 학생은 51명이다.

수학문제집 A를 구매한 학생의 수를 구하시오.

단서 교집합과 합집합에 대한 조건을 주고 집합 A의 개수를 구해야 해.

1st 주어진 조건을 집합으로 나타내봐.

수학문제집 A, B, C를 구매한 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하자.

집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$ 라 하면

$$(가)에서 n(A \cap B) = 15, n(B \cap C) = 12, n(C \cap A) = 11$$

$$(나)에서 n(A \cup B) = 55, n(B \cup C) = 54, n(C \cup A) = 51$$

또는 적어도 하나는 합집합 U로 표현

2nd $n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$ 임을 이용하여 $n(A) + n(B), n(B) + n(C), n(A) + n(C)$ 의 값을 구해.

이때, $n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$ 에서

$$n(A) + n(B) = 55 + 15 = 70$$

$$n(B) + n(C) = 54 + 12 = 66$$

$$n(C) + n(A) = 51 + 11 = 62$$

3rd $n(A)$ 를 구해봐.

위 세 식의 각 변을 더하면 $2(n(A) + n(B) + n(C)) = 198$

$$n(A) + n(B) + n(C) = 99 \quad \therefore n(A) = 99 - 66 = 33$$

☆ 유한집합의 원소의 개수

개념·공식

$$① n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$② n(A^C) = n(U) - n(A) \quad (\text{단, } U \text{는 전체집합})$$

$$③ n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(B)$$

$$④ n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

A 197 정답 {1, 4, 5, 6, 7, 9} 유한집합의 원소의 개수

정답 공식: 집합 M 의 원소의 합을 $S(M)$ 이라 하면,
 $S(M \cup N) = S(M) + S(N) - S(M \cap N)$ 이므로 주어진 값을 대입해 d 를 구하고, $M \cap N = \{4, 7, 9\}$ 를 이용하여 집합 M 을 구한다.

단서 1 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 32$
 자연수를 원소로 하는 두 집합

$$M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\},$$

$$N = \{a_i + d \mid a_i \in M, d \text{는 상수}\}$$

에 대하여 M 의 모든 원소의 합은 32, $M \cup N$ 의 모든 원소의 합은 62이고, $M \cap N = \{4, 7, 9\}$ 이다. 이때, 집합 M 을 원소나열법으로 나타내시오. (단, $n(M) = n(N) = 6$)

단서 2 $M \cap N \neq \emptyset$ 이므로
 $M \cup N$ 의 모든 원소의 합은 두 집합의 원소의 합을 더한 값에서 교집합의 원소의 합을 빼줘야 함을 잊지마.

1st 집합 M 의 모든 원소의 합과 집합 $M \cup N$ 의 모든 원소의 합을 이용하여 d 의 값을 구해보자.

$$\begin{aligned} \text{집합 } X \text{의 모든 원소의 합을 } S(X) \text{로 나타낸다고 하면} \\ S(M \cup N) &= S(M) + S(N) - S(M \cap N) \\ 62 &= 32 + (32 + 6d) - (4 + 7 + 9) \\ 6d &= 18 \text{에서 } d = 3 \end{aligned}$$

2nd 집합 $M \cap N = \{4, 7, 9\}$ 임을 이용하여 M 의 원소를 구해보자.

M 의 한 원소 a_1 에 대하여 $a_1 + 3 = 4$ 이므로 $a_1 = 1$

마찬가지로 $a_2 + 3 = 7$ 이므로 $a_2 = 4$

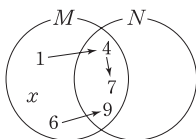
또, $a_3 + 3 = 9$ 에서 $a_3 = 6$

오른쪽 벤다이어그램에서 1, 4, 6, 7, 9 $\in M$
 나머지 한 원소를 x 라 하면

$$S(M) = 1 + 4 + 6 + 7 + 9 + x = 32 \quad \therefore x = 5$$

$$\therefore M = \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

주의 $N = \{a_1 + 3, a_2 + 3, a_3 + 3, a_4 + 3, a_5 + 3, a_6 + 3\}$
 에서 $4 \in N, 7 \in N, 9 \in N$ 이지?
 이때, 집합의 원소를 나열하는 순서는 따로 정해져 있지 않으니까 편의상 $a_1 + 3 = 4, a_2 + 3 = 7, a_3 + 3 = 9$ 로 놓고 풀 거야.



A 198 정답 10 부분집합과 서로 같은 집합

정답 공식: n 을 먼저 구한 뒤 A 의 한 원소, 예를 들면 -2 를 포함하는 집합의 개수를 구해보고, 다른 원소에 대해서도 마찬가지로 계산해 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 을 구한다.

집합 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 부분집합은 n 개가 있다.

단서 1 집합 A 의 원소의 개수가 3인
 부분집합을 모두 찾아봐.

이것을 각각 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 이라 하고 집합 A_k 의 모든 원소의 합을 a_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$)라고 한다. 이때,

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + n$ 의 값을 구하시오.

단서 2 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 은 n 개의 부분집합들의 모든 원소의 합을 뜻해. 즉, 이 합에 $-2, -1, 0, 1, 2$ 가 각각 몇 개씩 더해져 있는지 찾으려면 그 합을 구하기 편해질 거야.

1st 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 부분집합을 모두 찾아보자.

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 것은 $\{-2, -1, 0\}, \{-2, -1, 1\}, \{-2, -1, 2\}, \{-2, 0, 1\}, \{-2, 0, 2\}, \{-2, 1, 2\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 2\}, \{-1, 1, 2\}, \{0, 1, 2\}$ 의 10개
 $\therefore n = 10$ **주의** 규칙을 가지고 집합을 나열해야 빠먹지 않고 부분집합을 모두 찾을 수 있어.

2nd 앞에서 구한 부분집합의 원소들을 모두 더할 때,

집합 A 의 각각의 원소들이 몇 번씩 중복으로 나오는지 세어보자.

이때, $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 중에서 -2 를 원소로 갖는 집합은 6개이다.
 마찬가지로 $-1, 0, 1, 2$ 를 원소로 갖는 집합도 각각 6개씩 있으므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + n = 6 \times (-2 - 1 + 0 + 1 + 2) + 10 = 10$$

직접 구해볼까? 위에서 구한 10개의 부분집합을 각각 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 이라 하면
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = -3 + (-2) + (-1) + (-1) + 0 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 0$

A 199 정답 432 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

정답 공식: (집합 A 의 원소의 합) + (집합 B 의 원소의 합) - (집합 $A \cap B$ 의 원소의 합)
 $= 40$

전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A 는 원소의 개수가 4이고, 모든 원소의 합이 21이다. 상수 k 에 대하여 집합 $B = \{x + k \mid x \in A\}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A \cap B = \{4, 6\}$ **단서 1** 집합 A, B 는 각각 4, 6을 반드시 원소로 가져.

(나) $A \cup B$ 의 모든 원소의 합이 40이다.

단서 2 $(A \cup B \text{의 원소의 합}) = (A \text{의 원소의 합}) + (B \text{의 원소의 합}) - (A \cap B \text{의 원소의 합})$ 이다.

집합 A 의 모든 원소의 곱을 구하시오.

1st 집합 A 를 원소나열법으로 나타내고 관계식을 구해.

조건 (가)에서 집합 A 는 4, 6을 원소로 가지므로

$A = \{a, b, 4, 6\}$ (단, a, b 는 4, 6이 아닌 서로 다른 자연수)이라 하면
 집합 A 의 모든 원소의 합이 21이므로 $a + b + 4 + 6 = 21$

$$\therefore a + b = 11$$

2nd 원소의 합에 대해 주어진 조건 (나)를 이용해.

합집합의 원소의 개수 공식
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 에서 유추해 보.

$(A \cup B \text{의 원소의 합})$

$$= (A \text{의 원소의 합}) + (B \text{의 원소의 합}) - (A \cap B \text{의 원소의 합})$$

이고, 집합 B 는 $B = \{a + k, b + k, 4 + k, 6 + k\}$

$$(a + b + 4 + 6) + \{(a + k) + (b + k) + (4 + k) + (6 + k)\} - 10 = 40$$

$$2(a + b) + 20 + 4k - 10 = 40, 2 \times 11 + 10 + 4k = 40, 4k = 8$$

$$\therefore k = 2$$

이때, $B = \{a + 2, b + 2, 6, 8\}$ 이고 $A \cap B = \{4, 6\}$ 이어야 하므로

$a + 2 = 4$ 또는 $b + 2 = 4$, 즉 $a = 2, b = 9$ 또는 $a = 9, b = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 4, 6, 9\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 곱은

$$2 \times 4 \times 6 \times 9 = 432$$

실수

두 경우 모두 집합 A 의 원소에는 차이가 없지?



독특 풀이: 집합 B 의 원소를 미지수로 나타내고, 집합 A 와의 교집합의 원소와 같은 원소를 경우를 나누어 값 구하기

$A = \{a, b, 4, 6\}$ (단, a, b 는 4, 6이 아닌 서로 다른 자연수)이라 하면

집합 B 는 $B = \{a + k, b + k, 4 + k, 6 + k\}$

집합 B 의 원소 중 4, 6이 있어야 하고, $k > 0$ 이므로

$a + k, b + k$ 중 하나가 4이고, $a + k, b + k, 4 + k$ 중 하나가 6이야.

(i) $a + k = 4, 4 + k = 6$ 인 경우

$$k = 2 \text{이고, } a + 2 = 4 \text{에서 } a = 2$$

집합 A 의 원소의 합이 21이므로

$$2 + b + 4 + 6 = 21, b = 9 \quad \therefore A = \{2, 4, 6, 9\}$$

즉, 집합 A 의 모든 원소의 곱은 $2 \times 4 \times 6 \times 9 = 432$

(ii) $b + k = 4, 4 + k = 6$ 인 경우

(i)과 마찬가지로 구하면 $b = 2, a = 9$

이므로 집합 A 의 모든 원소의 곱은 432

(iii) $a + k = 4, b + k = 6$ 또는 $b + k = 4, a + k = 6$ 인 경우

$$\text{두 식의 각 변을 더하면 } a + b + 2k = 10 \quad \text{㉠}$$

한편, 집합 A 의 원소의 합은 21이므로

$$a + b + 4 + 6 = 21 \quad \therefore a + b = 11$$

$$a + b = 11 \text{을 ㉠에 대입하면 } k = -\frac{1}{2}$$

그런데 전체집합 U 가 자연수의 집합이므로 $k = -\frac{1}{2}$ 이면 집합 B 의

원소가 자연수가 되지 않아 모순이야.

따라서 (i)~(iii)에 의해 구하는 값은 432야.

A 200 정답 ③ 배수와 약수의 집합의 연산

정답 공식: $A \cap B = \{2, 5\}$ 또는 $A \cap B = \{2, 6\}$ 또는 $A \cap B = \{5, 6\}$ 이 될 수 있다.

18 이하의 자연수 k 에 대하여 두 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 양의 약수}\}, B = \{2, 5, 6\}$$

단서 1 집합 A 의 원소는 18 이하의 어떤 자연수의 약수임을 기억해 놓자.

이 있다. $n(A \cap B) = 2$ 일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 단서 2 $n(A \cap B) = 2$ 이므로 집합 B 의 원소 중 2개가 공통으로 집합 A 의 원소인 것이 있어야 해.

[보기]

ㄱ. $A \cap B = \{2, 5\}$ 이면 $k = 10$ 이다.

ㄴ. $A \cap B = \{5, 6\}$ 을 만족하는 k 가 존재한다.

ㄷ. 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k 의 값의 합은 28이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 집합 $A \cap B$ 는 두 집합 A 와 B 에 공통으로 속하는 원소를 모아 놓은 거야.

ㄱ. $A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 각각 2와 5를 원소로 가진다.
 $\therefore 2 \in A, 5 \in A$

즉, 2와 5가 k 의 약수이므로 k 는 10의 배수이다.

2와 5가 k 의 약수라 해서 $k = 10$ 이라고 바로 놓으면 안 돼. k 가 10의 배수이면 반드시

2와 5를 약수로 가지기 때문에 k 는 10의 배수라고 해야 정확한 표현이야.

이때, k 는 18 이하의 자연수이므로 $k = 10$ (참)

ㄴ. $A \cap B = \{5, 6\}$ 에서 두 집합 A, B 는 각각 5와 6을 원소로 가진다.
 $\therefore 5 \in A, 6 \in A$

즉, 5와 6이 k 의 약수이므로 k 는 30의 배수이다.

1보다 큰 두 자연수 m, n 이 서로소이면 k 의 최솟값은 mn 이 되는 거야.

이때, k 는 18 이하의 자연수이므로 조건을 만족하는 k 가 존재하지 않는다. (거짓)

2nd $n(A \cap B) = 2$ 이므로 집합 $A \cap B$ 가 되는 경우를 나누어 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 k 의 값을 구해보자.

ㄷ. $n(A \cap B) = 2$ 인 경우를 나누어서 생각해본다.

$n(A \cap B) = 2$ 인 경우는 $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cap B = \{2, 6\}$, $A \cap B = \{5, 6\}$ 의 세 가지가 나오지? 그런데 ㄴ에서 $A \cap B = \{5, 6\}$ 인 경우는 k 의 값이 존재하지 않으므로 $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cap B = \{2, 6\}$ 인 경우만 따지면 돼.

(i) $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때,

$k = 10$ 이고 집합 A 는 k 의 약수를 원소로 가지므로

$$A = \{1, 2, 5, 10\}$$

즉, 집합 $A - B = \{1, 10\}$ 의 모든 원소의 합은 11이다. ← 홀수

(ii) $A \cap B = \{2, 6\}$ 일 때,

$$2 \in A, 6 \in A$$

2와 6이 k 의 약수이므로 k 는 6의 배수이다.

이때, k 는 18 이하의 자연수이므로 $k = 6$ 또는 12 또는 18이다.

i) $k = 6$ 인 경우,

$$A = \{1, 2, 3, 6\}$$
이므로

집합 $A - B = \{1, 3\}$ 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 = 4 \leftarrow \text{짝수}$$

ii) $k = 12$ 인 경우,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
이므로

집합 $A - B = \{1, 3, 4, 12\}$ 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 4 + 12 = 20 \leftarrow \text{짝수}$$

iii) $k = 18$ 인 경우,

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
이므로

집합 $A - B = \{1, 3, 9, 18\}$ 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 9 + 18 = 31 \leftarrow \text{홀수}$$

함정

k 가 2와 6의 배수라고 해서 $k = 6$ 만 생각하면 안 돼. k 는 18 이하의 6의 배수가 모두 가능하지.

즉, 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k 의 값은 10, 18이므로 그 합은 $10 + 18 = 28$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

A 201 정답 ⑤ 합집합과 교집합

정답 공식: 원에 접하는 직선과 원의 중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

단서 1 각 집합의 원소는 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 각 원의 교점의 좌표야.

$1 \leq a < b$ 인 두 상수 a, b 에 대하여 세 집합

$$A = \{(x, y) \mid y = \frac{4}{3}x \text{이고 } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \mid y = \frac{4}{3}x \text{이고 } (x-a-1)^2 + (y-a)^2 = a^2\},$$

$$C = \{(x, y) \mid y = \frac{4}{3}x \text{이고 } (x-b-1)^2 + (y-b)^2 = b^2\}$$

이 있다. $n(A \cup B \cup C) = 3$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

단서 2 세 원과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이라는 거야.

- ① $\frac{14}{5}$ ② 3 ③ $\frac{16}{5}$
④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$

1st 문제부터 해석해 보자.

세 원 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$, $(x-a-1)^2 + (y-a)^2 = a^2$,

$(x-b-1)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 을 각각 O_1, O_2, O_3 이라 하면 세 집합 $A, B,$

C 는 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 세 원 O_1, O_2, O_3 이 각각 만나는 점의 좌표를 원소로

갖는다. 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($r > 0$)은 중심의 좌표가 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 이야.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 $(-2, -1)$ 이고 반지름의 길이가 1이므로 원 O_1 은 중심이 제 3 사분면에 있고 x 축과 접한다.

또한, $1 \leq a < b$ 인 두 상수 a, b 에 대하여

원 O_2 의 중심의 좌표는 $(a+1, a)$ 이고 반지름의 길이는 a ,

원 O_3 의 중심의 좌표는 $(b+1, b)$ 이고 반지름의 길이는 b 이므로

두 원 O_2, O_3 은 중심이 제 1 사분면에 있고 x 축과 접한다.

따라서 $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ 이다.

원 O_1 의 중심이 제 3 사분면에 있고 x 축과 접하므로 원 O_1 과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 가 만난다면 그 교점은

제 3 사분면에서 생겨. 또 두 원 O_2, O_3 의 중심이 제 1 사분면에 있고 x 축과 접하므로 두 원 O_2, O_3 과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 가 만난다면 그 교점은 제 1 사분면에서 생겨. 따라서 $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ 이야.

2nd 집합 A 의 원소의 개수를 구해.

원 O_1 의 중심 $(-2, -1)$ 과 직선 $y = \frac{4}{3}x$, 즉 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times (-2) - 3 \times (-1)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1 \text{이므로 원 } O_1 \text{과 직선 } y = \frac{4}{3}x \text{는}$$

접한다. 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$\therefore n(A) = 1 \quad d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{이야.}$$

3rd $n(A \cup B \cup C) = 3$ 이 되도록 하는 두 집합 B 와 C 의 원소의 개수를 구해.

$A \cap (B \cup C) = \emptyset$ 이고 $n(A) = 1$ 이므로 $n(A \cup B \cup C) = 3$ 이라면

$n(B \cup C) = 2$ 이어야 한다.

따라서 두 원 O_2, O_3 과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 의 위치 관계를 이용하여

$n(B \cup C) = 2$ 가 되도록 a, b 의 값을 결정하자.

두 원 O_2, O_3 의 중심 $(a+1, a)$, $(b+1, b)$ 는 직선 $y = x - 1$ 위의

점이고 $k \geq 1$ 인 상수 k 에 대하여 점 $(k+1, k)$ 와 직선 $y = \frac{4}{3}x$,

즉 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는 $\frac{|4(k+1) - 3k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{k+4}{5}$ 이다.

따라서 중심의 좌표가 $(k+1, k)$ 이고 반지름의 길이가 k 인 원에 대하여
이 원과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 는 $k=1$ 일 때 $k = \frac{k+4}{5}$ 이므로 한 점에서 만나고
 $k > 1$ 일 때 $k > \frac{k+4}{5}$ 이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

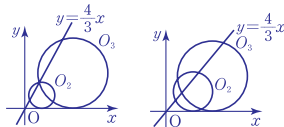
(i) $1 < a < b$ 일 때, $k > 1$ 일 때 $k - \frac{k+4}{5} = \frac{4k-4}{5} > 0$ 이므로 $k > \frac{k+4}{5}$ 야.

주의 $a < b$ 이므로 원 O_2 의 반지름의 길이는 원 O_3 의 반지름의 길이보다 길게,
두 원은 모두 x 축에 접하도록 그려야 해.

두 원 O_2, O_3 는 각각 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나므로

$n(B \cup C) = 3$ 또는 $n(B \cup C) = 4$ 이다.

각 경우의 원은 그림과 같아.



$n(B \cup C) = 3$ $n(B \cup C) = 4$

즉, 이 경우는 $n(B \cup C) = 2$ 이어야 하는 조건을 만족시키지 않는다.

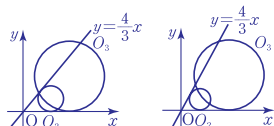
(ii) $a=1$ 이고 $b > 1$ 일 때,

원 O_2 는 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 한 점에서 만나고 원 O_3 은 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와

서로 다른 두 점에서 만나므로

$n(B \cup C) = 2$ 또는 $n(B \cup C) = 3$ 이다.

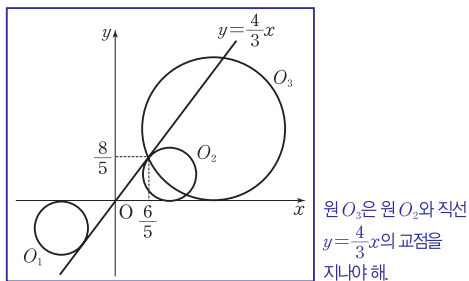
각 경우의 원은 그림과 같아.



$n(B \cup C) = 2$ $n(B \cup C) = 3$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키려면 $a=1, b > 1$ 이고, $n(B \cup C) = 2$

이어야 하므로 세 원 O_1, O_2, O_3 과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 는 그림과 같아야 한다.



원 O_3 은 원 O_2 와 직선
 $y = \frac{4}{3}x$ 의 교점을
지나야 해

4th b 의 값을 구하고 $a+b$ 의 값을 구하자.

$a=1$ 이므로 원 O_2 의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 이고 원 O_2 와

직선 $y = \frac{4}{3}x$ 의 교점의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4}{3}x-1\right)^2 = 1 \text{에서 } x^2 - 4x + 4 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 1$$

$$25x^2 - 60x + 36 = 0, (5x-6)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{6}{5}, y = \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

즉, 원 O_2 와 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 의 교점의 좌표는 $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 이고 원 O_3 이

이 점을 지나야 하므로 $(x-b-1)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 에 $x = \frac{6}{5}, y = \frac{8}{5}$ 을

$$\text{대입하면 } \left(\frac{6}{5} - b - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - b\right)^2 = b^2$$

$$\left(\frac{1}{5} - b\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - b\right)^2 = b^2, \frac{1}{25} - \frac{2}{5}b + b^2 + \frac{64}{25} - \frac{16}{5}b + b^2 = b^2$$

$$5b^2 - 18b + 13 = 0, (b-1)(5b-13) = 0 \quad \therefore b = \frac{13}{5} (\because b > 1)$$

$$\therefore a+b = 1 + \frac{13}{5} = \frac{18}{5}$$

정답 공식: 드모르간의 법칙에 의하여
 $A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B-A)^c$ 임을 이용한다.

두 자연수 $k, m (k \geq m)$ 에 대하여 전체집합

$$U = \{x | x \text{는 } k \text{ 이하의 자연수}\}$$

의 두 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } m \text{의 약수}\}$, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

단서 1 집합의 연산의 성질을 이용하여 $A \cup B^c = (B-A)^c$ 으로
변형할 수 있지?

(가) $B-A = \{4, 7\}$, $n(A \cup B^c) = 7$

(나) 집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든

원소의 합은 서로 같다.

단서 2 집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든 원소의 합이 같다고 하고,

$A \cap B$ 는 두 집합 A, B 의 공통인 원소를 가지고 있으니까 집합 A, B 에서
각각 $A \cap B$ 를 제외한 부분 즉, 집합 $A-B$ 와 집합 $B-A$ 의 모든 원소의
합도 서로 같다는 말이야.

집합 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합은?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

1st 조건 (가)에서 k 의 값을 구하자.

드모르간의 법칙 $A^c \cap B = B - A$ 에 의하여

$$A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B-A)^c \quad \text{㉠}$$

즉, 조건 (가)에서 $n(A \cup B^c) = n((B-A)^c) = 7$ 이고,

$B-A = \{4, 7\}$ 에서 $n(B-A) = 2$ 이므로

$$n(U) = n(B-A) + n((B-A)^c)$$

임의의 집합 X 에 대하여 $X \cup X^c = U, X \cap X^c = \emptyset$ 이자?

$$n(U) = n(X) + n(X^c) - n(X \cap X^c)$$

$$= n(X) + n(X^c) (\because X \cap X^c = \emptyset)$$

즉, $(B-A) \cup (B-A)^c = U$ 이고, $(B-A) \cap (B-A)^c = \emptyset$ 이므로

$$n(U) = n(B-A) + n((B-A)^c)$$

$$= n(B-A) + n(A \cup B^c) (\because \text{㉠})$$

$$= 2 + 7 = 9$$

따라서 $n(U) = 9$ 인 전체집합 U 는

$$U = \{x | x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \quad \text{㉡} \text{이므로 } k=9$$

2nd 집합 A 를 구하자.

$A = \{x | x \text{는 } m \text{의 약수}\}$ 이고 $B-A = \{4, 7\}$ 이므로 m 은 4의 배수도
아니고 7의 배수도 아니다.

이때, $m \leq 9$ 인 자연수이므로 가능한 m 의 값은

1, 2, 3, 5, 6, 9 중 하나이다.

한편, 조건 (나)에서 집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든 원소의
합이 서로 같으므로 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은 11이다. ... ㉢

$A = (A-B) \cup (A \cap B)$ 에서 $A \cap B$ 는 두 집합 A, B 의 공통인 원소를 가지고 있으므로

단서 2에 의하여 집합 $A-B$ 의 원소의 합과 집합 $B-A = \{4, 7\}$ 의 원소의 합이 같다고 했어.

따라서 m 은 4와 7을 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이

11 이상이어야 하므로 m 이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

$m=1, 2, 3, 5$ 이면 다음과 같으므로 ㉢에 모순이야.

$m=10$ 이면 $A = \{1\}$, $m=20$ 이면 $A = \{1, 2\}$, $m=30$ 이면 $A = \{1, 3\}$, $m=50$ 이면 $A = \{1, 5\}$

주의

3rd 집합 B 를 구하자. $A \cap B = \emptyset$ 이면 $1+3+9=13$, $A \cap B \neq \emptyset$ 이면 $1+9=10$, ... 등이
되어서 합이 11이 되도록 조건 (나)를 만족시킬 수 없어.

(i) $m=6$ 일 때

집합 A 는 $\{1, 2, 3, 6\}$ 이고, 이때, $A-B = \{2, 3, 6\}$ 이면
 $2+3+6=11$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m=9$ 일 때

집합 A 는 $\{1, 3, 9\}$ 이고, 이때, 집합 $A-B$ 의 원소의 합이 11인
경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

4th 집합 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합을 구하자.

(i), (ii)에 의하여 $m=6$ 이고 $B=\{1, 4, 7\}$ 이다. 즉,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} \cdots \textcircled{\text{B}}$$

이므로 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 8, 9\}$ ($\because \textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$)이다.

따라서 집합 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합은

$$5+8+9=22$$

A 203 정답 ② ★2등급 대비 [정답률 15%]

*허수의 성질을 이용하여 집합 A, B, C 의 원소를 구하고 집합 $A \cup (B-C)$ 의 원소 찾기 [유형 13+19]

세 집합 ▶ 단서2 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례로 대입하면 규칙이 보일 거야. 그럼 집합 A, C 를 원소나열법으로 나타낼 수 있어.

$$A = \left\{ i^n + \frac{1}{i^n} \mid n \text{은 자연수} \right\},$$

$$B = \{ z \mid z^2 = \bar{z}, z \text{는 복소수}, \bar{z} \text{는 } z \text{의 켤레복소수} \},$$

▶ 단서1 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓고 $z^2 = \bar{z}$ 에 대입하여 a, b 의 값을 구하자.

$$C = \left\{ \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n \mid n \text{은 자연수} \right\}$$

에 대하여 다음 중 집합 $A \cup (B-C)$ 의 원소가 아닌 것은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

오해 2등급? 세 집합 A, B, C 에 대하여 포함 관계를 파악하여 집합

$A \cup (B-C)$ 의 원소를 구하는 문제이다.

허수와 복소수를 포함한 세 집합 A, B, C 의 원소를 각각 구하는 과정이 복잡하다.



단서+발상

▶ 단서1 집합 B 는 $z^2 = \bar{z}$ 를 만족시키는 복소수의 모임이다. (개념)

이러한 복소수를 구하려면 $z = a + bi$ 라고 하고 $\bar{z} = a - bi$ 임을 이용해서

$(a + bi)^2 = a - bi$ 를 풀고, a, b 의 값을 각각 구한다. (발상)

▶ 단서2 자연수 n 에 대하여 허수 $i^n, \frac{1}{i^n}, \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ 의 거듭제곱을 각각 해보고,

반복되는 규칙을 찾으면 된다. (적용)

▶ 주의 허수의 거듭제곱 $i^n, \frac{1}{i^n}, \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ 들이 가지는 값이 어떤 주기를 가지고

반복되는지 직접 계산을 통해서 파악해야 한다.

[핵심 정답 공식: n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여 세 집합 A, B, C 의 원소를 각각 구해본다.]

----- [문제 풀이 순서] -----

▶ 1st 집합 A 를 원소나열법으로 나타내자. $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입해봐.

집합 A 에서 $i^n + \frac{1}{i^n}$ 에 n 대신 1, 2, 3, 4, ...를 대입해 보자.

(i) $n=1$ 일 때,

$$i + \frac{1}{i} = i - i = 0 \rightarrow \frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$i^2 + \frac{1}{i^2} = -1 - 1 = -2$$

(iii) $n=3$ 일 때,

$$i^3 + \frac{1}{i^3} = -i + \frac{1}{-i} = -i + i = 0$$

(iv) $n=4$ 일 때,

$$i^4 + \frac{1}{i^4} = 1 + 1 = 2$$

(v) $n=5$ 일 때, $i^5 + \frac{1}{i^5} = i + \frac{1}{i} = 0$

$$\vdots \rightarrow (i^4) \cdot i + \frac{i}{(i^4) \cdot i} = i + \frac{1}{i}$$

$\therefore A = \{-2, 0, 2\}$

▶ 2nd 집합 B 를 원소나열법으로 나타내자. $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓고 $z^2 = \bar{z}$ 가 되는 복소수를 구하면 돼.

집합 B 에서 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓고 $z^2 = \bar{z}$ 에 대입해 보자.

$$(a + bi)^2 = a - bi, a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

$$\therefore a^2 - b^2 = a \cdots \textcircled{1}, 2ab = -b$$

$$2ab = -b \text{에서 } b(2a + 1) = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

(i) $b=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a^2 = a, a(a-1) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore z = 0 \text{ 또는 } z = 1$$

(ii) $a = -\frac{1}{2}$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - b^2 = -\frac{1}{2}, b^2 = \frac{3}{4}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ 또는 } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore B = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

▶ 3rd 집합 C 를 원소나열법으로 나타내고, 집합 $A \cup (B-C)$ 를 구해.

집합 C 에서 $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n = \left\{ \frac{(1+i)^2}{2} \right\}^n = i^n$ 이므로 $C = \{-1, 1, -i, i\}$

이때, $B-C = \left\{ 0, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$ 이므로

$$A \cup (B-C) = \left\{ -2, 0, 2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

따라서 $A \cup (B-C)$ 의 원소가 아닌 것은 ② -1 이다.

$$\rightarrow \frac{1+i}{i-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

1등급 대비 특강

* $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ 의 거듭제곱 꼴의 값 기억하기

일반적으로 $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ 의 거듭제곱 꼴의 값을 알아두거나 계산이 번거로워

왜냐하면 이러한 분수 꼴의 계산은 기본 연산에서부터 많이 해오고 보왔던

꼴이기 때문이야.

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 \text{을 기억해두고,}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^1 = i, \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 = i^2 = -1, \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 = i^3 = -i,$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^4 = i^4 = 1 \text{임을 빠르고 정확하게 유추해낼 수 있어야 해.}$$



My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 대비 전략

고등학교 과정에서는 복소수에 대해서 깊게 배우지 않기 때문에 이론에 관한 문제를 만들기가 어려워. 그렇기 때문에 복소수 문제는 규칙과 몇 가지 꼴을 알고 있는 것이 중요해. 이를 알려면 다양한 문제를 많이 접하는 수밖에 없어.

A 204 정답 12 ★ 1등급 대비 [정답률 8%]

* 집합 A를 이용하여 집합 B를 나타내고 주어진 조건 (가), (다)에서 집합의 연산 법칙을 이용하기 [유형 12+17+25]

단서1 $n(A)=5$ 이므로 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 라 하면

$$B=\left\{\frac{x_1+a}{2}, \frac{x_2+a}{2}, \frac{x_3+a}{2}, \frac{x_4+a}{2}, \frac{x_5+a}{2}\right\} \text{이다.}$$

실수 전체의 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A)=5, B=\left\{\frac{x+a}{2} \mid x \in A\right\}$$

이다. 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

- (가) 집합 A의 모든 원소의 합은 28이다.
(나) 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 49이다.
(다) $A \cap B = \{10, 13\}$

단서2 $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 A의 모든 원소의 합과 B의 모든 원소의 합을 더한 값에서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합을 빼줘야 함을 기억해.

오해 1등급? 집합 A, $A \cup B$ 의 각각의 원소의 합과 집합 $A \cap B$ 의 원소를 보고 집합 $B=\left\{\frac{x+a}{2} \mid x \in A\right\}$ 를 정해주는 a의 값을 구하는 문제이다.
조건으로 주어진 두 집합 A, B의 원소의 관계를 보고, 식을 세우는 과정이 까다롭다.

단서+발상

단서1 집합 A의 원소의 개수가 5개라고 주어졌으므로 이를 구체적으로 나타낸다.

그러면 집합 B의 원소는 집합 A의 원소인 x와 상수 a에 대하여 $\frac{x+a}{2}$ 를 한 것이다. **발상**

단서2 두 집합 A, B에 대하여 집합 A와 합집합 $A \cup B$ 과 교집합 $A \cap B$ 를 알려줬고, 집합 B에 대해서는 **단서1**을 이용하여 구할 수 있으므로 집합의 연산법칙 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$ 를 이용해 본다.
집합 A의 원소의 합을 S(A)라 하면
 $S(A \cup B)=S(A)+S(B)-S(A \cap B)$ **적용**

주의 조건제시법으로 주어진 집합의 원소의 형태를 보고 집합 B는 집합 A의 원소에 의하여 결정된다는 것을 이해해야 한다.

핵심 정답 공식: 집합 A의 원소의 합을 S(A)라 하면
 $S(A \cup B)=S(A)+S(B)-S(A \cap B)$ 이므로 주어진 값을 대입해 a의 값을 구한다.

[문제 풀이 순서]

1st 두 집합 A와 B의 원소를 문자로 지정하자.

집합 A에 대하여 $n(A)=5$ 이므로 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 라 놓자.

$$B=\left\{\frac{x+a}{2} \mid x \in A\right\} \text{이므로}$$

$$B=\left\{\frac{x_1+a}{2}, \frac{x_2+a}{2}, \frac{x_3+a}{2}, \frac{x_4+a}{2}, \frac{x_5+a}{2}\right\}$$

2nd 조건에 맞게 식을 구하자.

조건 (가)에 의해 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28 \cdots \textcircled{1}$

이때, 집합 B의 원소의 합은

$$\begin{aligned} & \frac{x_1+a}{2} + \frac{x_2+a}{2} + \frac{x_3+a}{2} + \frac{x_4+a}{2} + \frac{x_5+a}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) + \frac{5}{2}a \\ &= \frac{1}{2} \times 28 + \frac{5}{2}a (\because \textcircled{1}) = 14 + \frac{5}{2}a \end{aligned}$$

3rd 집합 $A \cup B$, A, B, $A \cap B$ 의 각각의 원소의 합의 관계를 알자.

따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 두 집합 A와 B의 모든 원소의 합을 더한 값에서 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합을 빼면 되므로 조건 (나)와 (다)에 의해

$$49=28+\left(14+\frac{5}{2}a\right)-(10+13)$$

$$\frac{5}{2}a=30$$

$$\therefore a=12$$

$A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하기 위해 단순히 A의 모든 원소의 합과 B의 모든 원소의 합을 더해버리면 $A \cap B$ 의 모든 원소가 두 번 더해지겠지? 따라서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합을 한 번 빼줘야 해.

1등급 대비 특강

* 유한집합의 합집합의 원소의 개수 구하기

- ① $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
② $n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+n(A \cap B \cap C)$



My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 대비 전략

집합에서는 원소를 일일이 다 적어보는 게 생각보다 유용할 때가 많아. 복잡한 문제더라도 단순히 나열하는 것만으로 쉽게 풀릴 때가 있다는 뜻이지.
심지어 이 문제는 집합 A의 원소의 개수가 5개, 집합 B의 원소의 개수가 5개 밖에 안 되기 때문에 한 번 나열해보면 금방 풀 수 있는 문제였어.

★ 집합의 표현 방법

개념·공식

- ① 원소나열법
 $\Rightarrow \{a, b, c\}$ 와 같이 집합 기호 안에 모든 원소를 나열하는 방법
② 조건제시법
 $\Rightarrow \{x \mid x \text{에 대한 조건}\}$ 의 형태로 원소가 될 조건을 제시하는 방법



A 내신+학평 대비 단원별 모의고사

문제편
p. 190

모의

A 01 정답 ⑤ 집합의 뜻과 표현 방법

(정답 공식: 표를 만들어 가능한 값을 모두 구한다.)

집합 $S = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 집합 X 를

$$X = \{x^2 - xy + y^2 \mid x \in S, y \in S\}$$

단서 S 의 원소 0, 1, 2를 x, y 에 각각 대입해 보.

라고 정의할 때, 집합 X 의 모든 원소의 합은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

1st x, y 의 값에 S 의 원소들을 대입하여 집합 X 의 원소들을 구해.

x, y 에 S 의 원소를 대입해서 $x^2 - xy + y^2$ 을 계산한 값은 아래 표와 같다.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	4
1	1	1	3
2	4	3	4

따라서 집합 $X = \{0, 1, 3, 4\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $0+1+3+4=8$ 이다. 중복되는 것도 한 번씩만 적는 거야.

모의

A 02 정답 ⑤ 기호 $\in, \subset$ 의 사용

(정답 공식: 원소와 집합의 포함 관계, 집합과 집합의 포함 관계의 기호의 정의를 이용해 선택지 중 옳지 않은 것을 고른다.)

집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{\emptyset\} \subset A$ ② $\emptyset \in A$
 ③ $\{\emptyset\} \in A$ ④ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset A$
 ⑤ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$

단서 $\emptyset = a, \{\emptyset\} = b$ 로 바꿔서 생각하면 쉬워. 집합 $\{a, b\}$ 의 부분집합은 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 이니까 집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 의 원소는 $\emptyset, \{\emptyset\}$ 이고 부분집합은 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 이야.

1st 원소와 집합 사이에는 $\in$ 을, 집합과 집합 사이에는 $\subset$ 을 사용하는 것에 주의하여 선택지에서 옳은 것을 찾아보자.

$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 의 원소는 $\emptyset, \{\emptyset\}$, 부분집합은 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 이다.

실수

$\emptyset$ 가 공집합을 의미하는 기호로 사용된 건지, 집합 A 의 원소로서 사용된 건지 잘 구별해야 해.

⑤ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 은 집합 A 의 부분집합이지만 원소는 아니다.

모의

A 03 정답 5 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

(정답 공식: $A \cap B = \{1, -4\}$ 에서 방정식 $-4 = x^2 + 4x$ 를 만족시키는 해를 구하고, 집합 B 에 대입한다.)

두 집합 $A = \{1, 3, x^2 + 4x\}$, $B = \{1, x-2, x^2 + 1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, -4\}$ 일 때, $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하시오. 단서 -4 가 집합 A 와 B 의 공통인 원소여야 해. 따라서 $x^2 + 4x = -4$ 이겠지?

1st 1과 -4 가 집합 A, B 에 모두 속하도록 x 의 값을 구해보자.

$$A \cap B = \{1, -4\} \text{이므로 } -4 \in A$$

$$x^2 + 4x = -4, x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0 \therefore x = -2$$

2nd $A \cap B$ 를 구해.

$$x = -2 \text{이므로}$$

$$x - 2 = -4, x^2 + 1 = 5$$

$$\therefore A = \{1, 3, -4\}, B = \{1, -4, 5\}$$

$A \cap B = \{1, -4\}$ 이지? 확인하고 넘어가야 해.

따라서 $A \cup B = \{1, -4, 3, 5\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $1 - 4 + 3 + 5 = 5$ 이다.

모의

A 04 정답 ① 부분집합의 개수

(정답 공식: 주어진 식으로부터 집합 X 의 조건을 구해 이를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구한다.)

두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수인 자연수}\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 단서 2 $A - B \subset X$ 임을 알 수 있어.

$$(X \cap A^c) \cup A = A, (A - B) \cup X = X$$

를 만족시키는 집합 X 의 개수는?

- 단서 1 좌변은 분배법칙을 적용해서 정리해.
 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 16

1st 주어진 식을 정리하여 간단히 해보자.

$(X \cap A^c) \cup A = A$ 의 좌변을 분배법칙을 적용하여 정리하면

$$(X \cap A^c) \cup A = (X \cup A) \cap (A^c \cup A)$$

$$= (X \cup A) \cap U$$

$$= X \cup A$$

$$X \cup A = A \text{이므로 } X \subset A \cdots \textcircled{1}$$

$$(A - B) \cup X = X \text{이므로 } A - B \subset X \cdots \textcircled{2}$$

2nd 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하자.

①, ②에서 $A - B \subset X \subset A$ 이다.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{2, 3, 5, 7\} \text{이므로}$$

$$A - B = \{4, 6, 8, 10\}$$

따라서 $A - B \subset X \subset A$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 $2^{5-4} = 2$

집합 A 의 원소 5개 중에서 $A - B$ 의 원소 4개를 포함하는 A 의 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-4} = 2^1$ 개이다.

모의

A 05 정답 ② 배수와 약수의 집합의 연산

(정답 공식: 배수의 성질을 이용하여 집합의 포함 관계를 구해본다.)

단서 1 자연수 k 가 a 의 배수일 때 $A_k \subset A_a$ 인 성질이 있어.

자연수 k 에 대하여 A_k 를 k 의 배수의 집합이라고 하자. 이때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

$$\neg. A_2 \cap A_4 = A_2$$

단서 2 $A_4 \subset A_2, A_6 \subset A_3, k$ 는 12와 16의 공약수야.

$$\neg. A_3^c \cap A_6 = \emptyset$$

$$\neg. (A_{12} \cup A_{16}) \subset A_k \text{인 } k \text{는 4뿐이다.}$$

- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\neg, \neg$
 ④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg, \neg$

1st 자연수의 배수를 원소로 가지는 집합의 성질을 이용하여 [보기]의 참, 거짓을 판단해 보자.

$$\neg. A_4 \subset A_2 \text{이므로 } A_2 \cap A_4 = A_4 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. A_6 \subset A_3 \text{이므로 } A_3^c \cap A_6 = A_6 - A_3 = \emptyset \text{ (참)}$$

$$\neg. k \text{가 } 12 \text{와 } 16 \text{의 공약수이면 } (A_{12} \cup A_{16}) \subset A_k \text{가 성립한다.}$$

따라서 $k = 1, 2, 4$ 가 가능하다. (거짓)

$$\rightarrow k \text{가 } 12 \text{의 약수이므로 } A_{12} \subset A_k, k \text{가 } 16 \text{의 약수이므로 } A_{16} \subset A_k$$

즉, A_k 는 A_{12} 와 A_{16} 의 모든 원소를 포함하고 있는 집합이다.

$$\text{따라서 } (A_{12} \cup A_{16}) \subset A_k$$

실수

집합 사이의 포함 관계가 헷갈린다면 각 집합을 원소나열법으로 나타내봐!

A 06 정답 ⑤ 조건을 만족시키는 부분집합의 개수

(정답 공식: 전체 집합의 수에서 짝수만 이루어진 집합의 수를 뺀다.)

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 집합의 개수는?

단서 (모든 부분집합의 개수) - (원소가 모두 짝수인 부분집합의 개수)

- ① 24 ② 48 ③ 72 ④ 96 ⑤ 120

1st 전체 부분집합의 개수에서 짝수만 원소로 가지는 부분집합의 개수를 빼자.
집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^7 = 128$ 집합 A 의 원소의 개수가 7개이지?

짝수인 2, 4, 6만 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$
따라서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 부분집합의 수는 부분집합 전체의 수에서 짝수만 원소로 갖는 부분집합의 수를 제외하면 된다.

(적어도 한 개의 홀수를 포함하는 집합의 수)

$= (\text{집합 } A \text{의 부분집합 전체의 수})$

$- (\text{짝수만 원소로 갖는 } A \text{의 부분집합의 수})$

$= 128 - 8 = 120$ 적어도 한 개의 홀수를 포함해야 하니까 공집합은 제외시켜야 해.
그런데 집합 A 의 부분집합에도, 짝수만 원소로 갖는 집합의 부분집합에도 공집합이 포함되어 있고 서로 뺐으니까 결과적으로 구하려는 집합에는 공집합이 포함되지 않아.

수능 해강

* '공집합 $\emptyset$ 이 아니다.'라는 표현 해석하기

'적어도 ~ 한 개를 포함하는 ~'의 의미는 '공집합이 $\emptyset$ (공집합)이 아닌 ~'과 같기 때문에 종종 다음과 같은 형태의 질문으로 제시되기도 해. 예를 들어, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x | x \text{는 홀수}, x \in A\}$ 라고 할 때, 'A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 부분집합의 개수는?'과 ' $A \cap B \neq \emptyset$ 을 만족하는 집합 B의 개수는?'은 같은 질문이야.

A 07 정답 ③ 집합 사이의 포함 관계

(정답 공식: 벤다이어그램을 이용하여 $A \subset B$ 이면 항상 성립하는 것을 고른다.)

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? 단서 선택지의 집합을 각각 벤다이어그램으로 나타내서 확인해 봐.

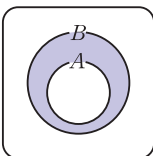
- ① $B - A = \emptyset$ ② $A \cup B = A$ ③ $A \cap B^c = \emptyset$
④ $A \cup B^c = U$ ⑤ $B - (A \cap B) = \emptyset$

1st 주어진 조건을 벤다이어그램으로 그려놓고 생각하면 편해.

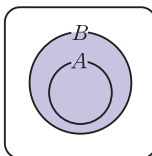
주의 $A \subset B$ 인 일반적인 상황으로 벤다이어그램을 그려야 해.
 $A = B$ 같은 특수한 경우를 그리면 안 된다는 거야.

두 집합 A, B 의 관계 $A \subset B$ 를 벤다이어그램으로 그린 후 각각의 선택지를 벤다이어그램에서 확인해 보면 다음과 같다.

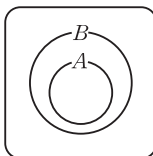
- ① $B - A \neq \emptyset$ ② $A \cup B \neq A$ ③ $A \cap B^c = A - B = \emptyset$



∴ 거짓

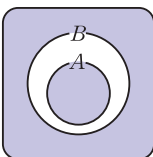


∴ 거짓



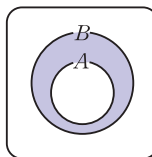
∴ 참

- ④ $A \cup B^c \neq U$



∴ 거짓

- ⑤ $B - (A \cap B) = B - A \neq \emptyset$



∴ 거짓

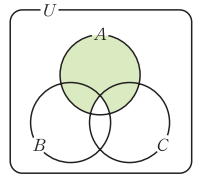
$A = B$ 이면 $A \subset B$ 이고 $B - A = \emptyset$ 이지만 $A \subset B$ 라고 해서 $A = B$ 인 경우를 항상 포함하지는 않기 때문에 $B - A = \emptyset$ 이라고 할 수 없어.

A 08 정답 ① 집합의 연산

(정답 공식: 선택지의 집합을 벤다이어그램에 나타내본다.)

오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은? (단, U 는 전체집합)

- ① $A - (B \cap C)$
② $A - (B - C)$
③ $A - (C - B)$
④ $A \cap (B \cup C)^c$
⑤ $A - (B^c \cup C^c)$

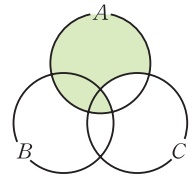
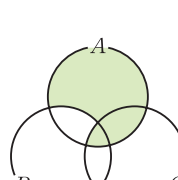
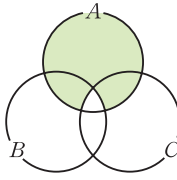


단서 벤다이어그램으로 나타내서 오른쪽 그림과 비교해 봐.

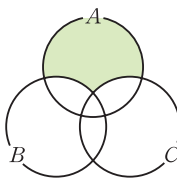
1st 각 선택지의 집합을 벤다이어그램으로 그려봐.

각각의 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

- ① $A - (B \cap C)$ ② $A - (B - C)$ ③ $A - (C - B)$



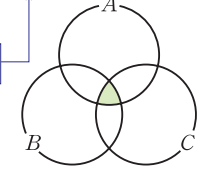
- ④ $A \cap (B \cup C)^c$



$$\begin{aligned} \text{⑤ } A - (B^c \cup C^c) \\ &= A \cap (B^c \cup C^c)^c \\ &= A \cap (B \cap C) \\ &= A \cap B \cap C \end{aligned}$$

$$A - B = A \cap B^c$$

드모르간의 법칙을 이용해.



심수

주어진 식이 복잡하면 간단히 한 후에 벤다이어그램을 그리는 것이 실수를 줄이는 방법이지.

따라서 주어진 그림과 일치하는 것은 ①이다.

A 09 정답 ② 유한집합의 원소의 개수

(정답 공식: $n(A \cap B)$ 를 구한 뒤, $B \cap A^c = B - A$ 임을 이용한다.)

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(A) = 24, n(B) = 18, n(A \cup B) = 30$$

일 때, $n(B \cap A^c)$ 의 값은? 단서 1 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

단서 2 $n(B \cap A^c) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A)$

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

1st 주어진 조건을 이용하여 $n(B \cap A^c) = n(B - A)$ 를 구하자.

$$n(A) = 24, n(B) = 18, n(A \cup B) = 30 \text{ 이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ 에서}$$

$$30 = 24 + 18 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 12$$

$$n(B \cap A^c) = n(B - A) \text{ 에 의해}$$

$$[\text{차집합의 공식}] = n(B) - n(A \cap B)$$

$$B - A = B \cap A^c = 18 - 12 = 6$$

다른 풀이: $n(B \cap A^c) = n(B - A) = n(A \cup B) - n(A)$ 로 계산하기

$$n(A) = 24, n(B) = 18, n(A \cup B) = 30 \text{ 이므로}$$

$$n(B \cap A^c) = n(B - A)$$

$$= n(A \cup B) - n(A)$$

$$= 30 - 24 = 6$$

