1 판매량

1 만족도

1 평가도

KOREA EDUCATIONAL BRAND AWARDS 대한민국 교육브랜드 대상 2022

Xistory stands for extra intensive story for an entrance examination for a university.

수능 기출 문제 은행

2024 수능 대비

Xi story

수능 연도별 모의고사

고3 수학

모두 수록 [확률과 통계 / 미적분, 기하]

최신 수능 5회
+ 최신 모평 8회
+ 최신 학평 16회
+ 수능 예시 1회

30회

▲ 최신 기출 문제 동영상 강의 QR코드 수록

▲ 빠른 정답 확인과 정확한 등급컷 수록

▲ 문제 분석, 정답 공식, 단서 체크 해설

▲ 실수, 함정, 주의, 단계별로 분석한 입체 첨삭 해설

▲ 킬러 문제+문제 분석, 풀이 단서 체크 해설

▲ 다른 풀이, 쉬운 풀이, 톡톡 풀이 등 다양한 풀이법 수록

★ 부록: 연습용 [OMR 카드]

수경출판사

제 2 교시

수학 영역

▲ 수학 동영상 강의

1회

5지선다형

1. $(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

2. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

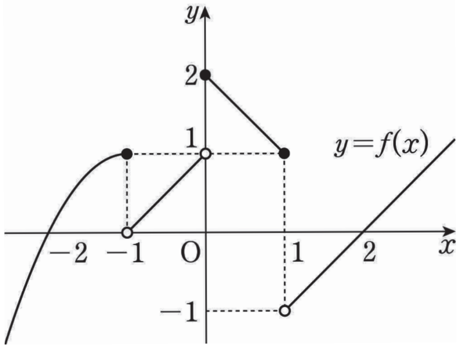
3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4=6, \quad 2a_7=a_{19}$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

정답 및 해설 p.5

수학 영역

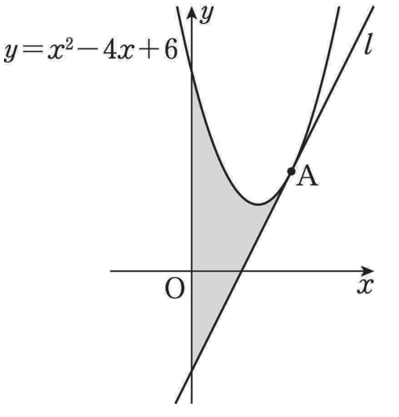
5. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

6. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

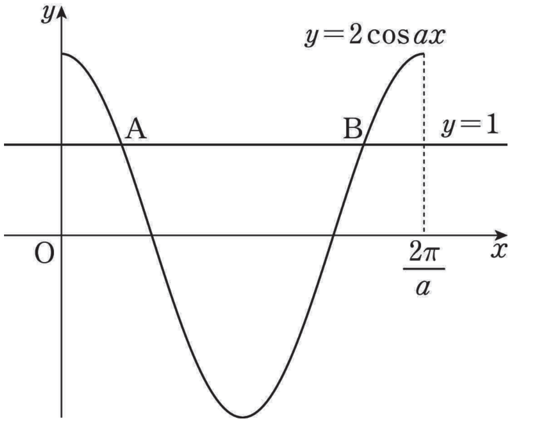
① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

8. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0\le x\le\frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\text{AB}}=\frac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점]



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{3}\Pi_{4}$ 의 값은? [2점]

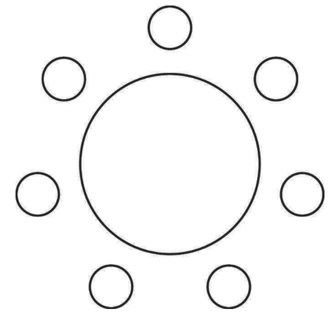
① 63 ② 69 ③ 75 ④ 81 ⑤ 87

24. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

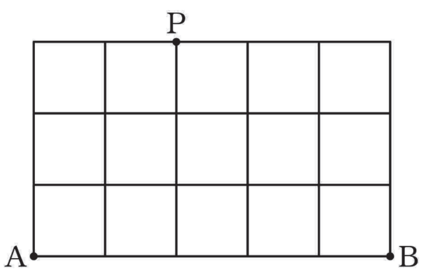
① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

25. A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 320 ② 360 ③ 400 ④ 440 ⑤ 480



26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.) [3점]



① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

1회

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-5n)=2$ 를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$ 를 만족시키는 모든 양수 a 의 값의 합은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

26. 첫째항이 1 인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ 의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

정답 및 해설 p.12~13

제 2 교시

수학 영역(기하)

1회

5지선다형

23. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P와 y축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

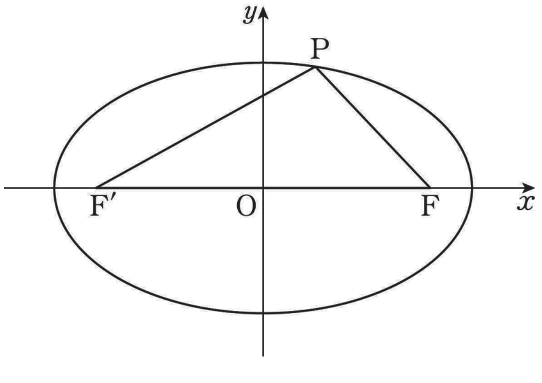
24. 두 초점의 좌표가 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$인 타원이 y축과 점 $(0,\ 7)$에서 만날 때, 이 타원의 단축의 길이는? [3점]

① $4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{7}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ 12 ⑤ $4\sqrt{10}$

25. 쌍곡선 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

26. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [3점]



① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

제 2 교시

수학 영역

☆ 새수능 체제에 맞게 기출 문제를 추가 수록 또는 재배치했습니다.

3회

5지선다형

2020실시(가) 3월/교육청 1

1. $8^{\frac{4}{3}} \times 2^{-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020실시(가) 3월/교육청 2

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 5$, $a_5 = 11$ 일 때, a_8 의 값은? [2점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

2020실시(나) 3월/교육청 3

3. θ 가 제3사분면의 각이고 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

2020실시(나) 3월/교육청 5

4. $\int_5^2 2t\,dt - \int_5^0 2t\,dt$ 의 값은? [3점]

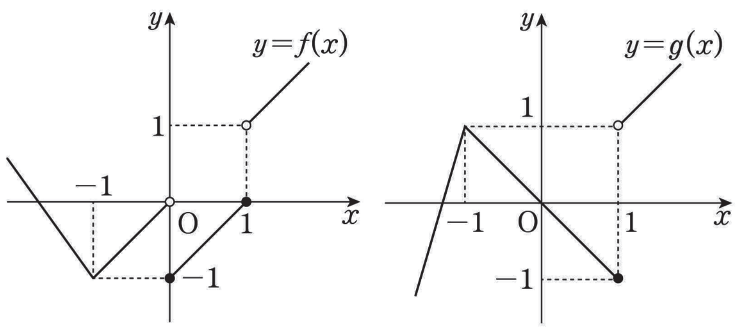
① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

정답 및 해설 p.29

수학 영역

2020실시(나) 3월/교육청 12

5. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)=-1$

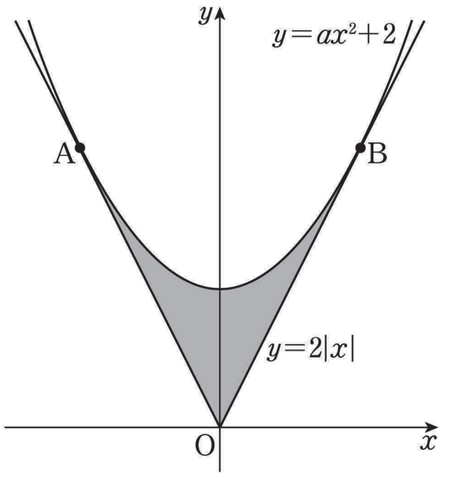
ㄴ. $f(1)g(1)=0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

2020실시(가) 3월/교육청 10

6. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [3점]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

2020실시(나) 3월/교육청 15

7. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} k a_k$$

를 만족시킨다. $a_1=2$일 때, $a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}$의 값은? [3점]

① 47 ② 49 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

2020실시(나) 3월/교육청 6

8. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-1)f(x)=x^2-3x+2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

01 정답 ⑤ ∗지수법칙 – 밑이 같은 계산 [정답률 92%]

(정답 공식: $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$이다.)

1st 지수법칙을 이용해.

$$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$$

$3\sqrt{3}=3\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{1+\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$, $(a^m)^n=a^{mn}$

$$=3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

02 정답 ② ∗도함수를 이용하여 미분계수 구하기 [정답률 98%]

(정답 공식: 함수 $y=x^n$ (n은 자연수)의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이고 $y=c$(c는 상수)의 도함수는 $y'=0$이다.)

1st 도함수 $f'(x)$를 구해 $x=-1$을 대입하자.

함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+4x+3$

$(x^3)'=3\times x^{3-1}=3x^2$, $(2x^2)'=2\times 2\times x^{2-1}=4x$
$(3x)'=3\times 1=3$, $(4)'=0$

$\therefore f'(-1)=3\times(-1)^2+4\times(-1)+3=2$

03 정답 ④ ∗등차수열의 특정항 구하기 – 특정항 이용 [정답률 92%]

(정답 공식: 첫째항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a_1+(n-1)d$이다.)

1st a_4, a_7, a_{19}를 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타내.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=6$에서 $a_1+3d=6$ ⋯ ㉠

$a_4=a_1+(4-1)d=a_1+3d$

$2a_7=a_{19}$에서 $2(a_1+6d)=a_1+18d$, $2a_1+12d=a_1+18d$

$a_7=a_1+(7-1)d=a_1+6d$
$a_{19}=a_1+(19-1)d=a_1+18d$

$\therefore a_1=6d$ ⋯ ㉡

2nd 두 식을 연립하여 a_1의 값을 구해.

㉡을 ㉠에 대입하면 $6d+3d=6$, $9d=6$ $\qquad \therefore d=\frac{2}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 $a_1=6\times\frac{2}{3}=4$

04 정답 ④ ∗함수의 좌극한값과 우극한값 [정답률 95%]

(정답 공식: $x\to -1+$는 $x=-1$의 오른쪽에서 -1로 접근하는 것이고, $x\to 1-$는 $x=1$의 왼쪽에서 1로 접근하는 것이다.)

1st 주어진 그래프를 따라가며 $x=-1$에서의 우극한값, $x=1$에서의 좌극한값을 구해.

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1의 오른쪽에서 -1로 접근할 때, 그래프를 따라가면 0에 수렴하므로

→ $x=-1$에서의 우극한값이야.

$\lim_{x\to -1+} f(x)=0$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1의 왼쪽에서 1로 접근할 때, 그래프를 따라가면 1에 수렴하므로

→ $x=1$에서의 좌극한값이야.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=0+1=1$

05 정답 ① ∗삼각함수 사이의 관계 – 값 구하기 [정답률 83%]

(정답 공식: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용한다.)

1st θ의 값부터 구해.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$에서

$\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore \theta=\frac{5}{6}\pi\ \left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$이면 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$야.
그런데 조건에서 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\theta=\frac{5}{6}\pi$야.

2nd $\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구해.

따라서 $\cos\theta=\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan\theta=\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

$\cos\theta+\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{6}\right)+\left(-\frac{2\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

[다른 풀이]

위의 풀이에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이고
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta<0$이야.

$=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \cos\theta+\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

06 정답 ③ ∗$h\to 0$일 때의 변형된 미분계수의 정의 [정답률 81%]

(정답 공식: $\lim_{\square\to 0}\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}=f'(a)$)

1st x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율을 이용해 a의 값을 구해.

함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은 함수 $f(x)$에서 x의 값이 p에서 q까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$야.

$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\{2(a+1)^2-3(a+1)+5\}-(2a^2-3a+5)$

$=2a^2+4a+2-3a-3+5-2a^2+3a-5$

$=4a-1$

이때, 평균변화율이 7이므로

$4a-1=7 \qquad \therefore a=2$

2nd $\lim_{\square\to 0}\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}=f'(a)$임을 이용할 수 있게 식을 변형해.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2$

$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$

$=2f'(a)$ ⋯ ㉠

실수 $h\to 0$일 때, $2h\to 0$이므로 분모에도 $2h$가 필요해. 그런데 등식이 성립해야 하니까 2를 분자에도 곱해야 해.

3rd $f'(x)$를 구한 후 $x=a$를 대입하자.

함수 $f(x)=2x^2-3x+5$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x-3$이므로

$f'(a)=f'(2)=4\times 2-3=5$

따라서 ㉠에 의해 구하는 값은

$2f'(a)=2f'(2)=2\times 5=10$

07 정답 ② ∗곡선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이 [정답률 80%]

(정답 공식: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다. 구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.)

1st 접선 l의 방정식을 구해.

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면 $f'(x)=2x-4$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(3, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=2\times 3-4=2$이므로 접선 l의 방정식은

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $x=a$일 때의 $f(x)$의 미분계수와 같아.

$y-3=2(x-3) \qquad \therefore y=2x-3$

2nd 곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하자.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^3 |(x^2-4x+6)-(2x-3)|dx$

$=\int_0^3 \{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$

→ 구간 $[0, 3]$에서 두 함수의 그래프의 위치 관계를 보면 $x^2-4x+6\ge 2x-3$이야.

$=\int_0^3 (x^2-6x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$

$=\frac{1}{3}\times 27-3\times 9+9\times 3=9$

08 정답 ③ *삼각방정식과 삼각부등식의 활용 [정답률 65%]

(정답 공식: 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.)

1st 두 점 A, B의 좌표를 구해.

두 점 A, B는 곡선 $y=2\cos ax\left(0\le x\le\frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$의 교점이므로

두 점의 x좌표를 구하기 위해 연립하면

$2\cos ax=1$에서 $\cos ax=\frac{1}{2}$

이때, $0\le x\le\frac{2\pi}{a}$에서 $0\le ax\le 2\pi$이므로

$0\le x\le\pi$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{3}$야.

$ax=\frac{\pi}{3}$ 또는 $ax=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{5}{3a}\pi$

$0\le x\le\pi$에서 $\cos x=k(-1<k<1)$를 만족시키는 x의 값을 α라 하면 함수 $y=\cos x$는 주기가 2π이고 그래프가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭인 함수이므로 $\pi\le x\le 2\pi$에서 $\cos x=k$를 만족시키는 x의 값은 $2\pi-\alpha$야.

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{\pi}{3a},\ 1\right)$, $\left(\frac{5}{3a}\pi,\ 1\right)$이다.

2nd 선분 AB의 길이가 $\frac{8}{3}$임을 이용하여 a의 값을 구해.

문제의 그림에서 점 B가 점 A의 오른쪽에 있으니까 점 B의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 커.

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$에서 $\frac{5}{3a}\pi-\frac{\pi}{3a}=\frac{8}{3}$

$\frac{4}{3a}\pi=\frac{8}{3}$

$\therefore a=\frac{4}{3}\pi\times\frac{3}{8}=\frac{\pi}{2}$

09 정답 ① *점이 움직인 거리 [정답률 75%]

(정답 공식: 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 위치를 $x(t)$라 하면 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치는 $x(a)=x(0)+\int_0^a v(t)dt$이고, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$이다.)

1st 시각 $t=0$과 $t=6$에서의 점 P의 위치가 같음을 이용해 a의 값을 구하자.

시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도는 $v(t)=3t^2+at$이고,

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 시각 $t=0$에서의 위치는 $x(0)$이므로

시각 $t=6$에서의 위치를 구하면

$$x(6)=x(0)+\int_0^6 v(t)dt=x(0)+\int_0^6(3t^2+at)dt$$

$$=x(0)+\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6$$

$$=x(0)+216+18a$$

이때, $x(0)=x(6)$이므로

$x(0)=x(0)+216+18a$

$18a=-216$

$\therefore a=-12$

2nd 정적분을 이용하여 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리를 구해.

따라서 $v(t)=3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$

$$\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^6|3t^2-12t|dt$$

$$=\int_0^4(-3t^2+12t)dt+\int_4^6(3t^2-12t)dt$$

$v(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$이므로 $0\le t<4$이면 $|v(t)|=-3t^2+12t$이고, $4\le t\le 6$이면 $|v(t)|=3t^2-12t$야.

$$=\left[-t^3+6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^6$$

$$=-64+96+216-216-(64-96)$$

$$=32+32$$

$$=64$$

[다른 풀이]

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치와 시각 $t=6$에서의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량이 0임을 이용하자.

함정: 점 P의 시각 $t=0$일 때의 위치와 시각 $t=6$일 때의 위치가 서로 같으므로 $t=0$부터 $t=6$까지의 점 P의 위치의 변화량이 없음을 찾아내어 계산을 빨리 할 수 있어.

점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2+at$이므로

$$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^6(3t^2+at)dt=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6$$

$$=216+18a$$

$$=0$$

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

$\therefore a=-12$

(이하 동일)

10 정답 ⑤ *최대, 최소를 이용한 미정계수의 결정 [정답률 67%]

(정답 공식: 함수 $(g\circ f)(x)$의 정의역은 $f(x)$의 값의 범위, 즉 함수 $f(x)$의 치역이 된다.)

1st 함수 $(g\circ f)(x)$의 정의역을 구하자.

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge k-1$이다.

모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2\ge 0$이므로 $(x+1)^2+k-1\ge k-1$이야. 즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-1$이지.

이때, 함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\ge k-1$이므로

함수 $g(t)$는 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

함수 $g(t)$가 정의된 구간에서 최솟값이 무엇인지 $k-1$의 값의 범위에 따라 파악하면 돼.

2nd 함수 $g(x)$의 도함수를 구하고 $g(x)$의 증가와 감소를 확인해.

한편, $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

3rd 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(t)$의 최솟값이 2가 되기 위한 조건을 찾아봐.

함수 $g(t)$의 최솟값이 2이므로 $g(t)=2$에서

$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$

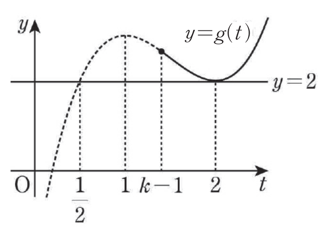
$h(t)=2t^3-9t^2+12t-4$라 하면 $h(2)=0$이므로 $h(t)$는 $t-2$를 인수로 가지지? 조립제법을 이용하여 인수분해해봐.

$(t-2)(2t^2-5t+2)=0$

$(2t-1)(t-2)^2=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$\frac{1}{2}\le k-1\le 2$이어야 한다.

$k-1<\frac{1}{2}$일 때, 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g(k-1)<2$이고, $k-1>2$일 때는 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g(k-1)>2$야.

즉, $\frac{3}{2}\le k\le 3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

11 정답 ⑤ *로그함수와 지수함수의 그래프와 도형 [정답률 57%]

(정답 공식: $\log_a N=x$이면 $N=a^x$이다.)

1st 세 점 A, B, C의 좌표를 k로 나타내.

점 A는 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 직선 $x=k$의 교점이므로 점 A의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$이다. 점 B는 직선 $x=k$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로

점 B의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1-8)$에서 $(k,\ 2^{k-1}-7)$이다.

점 B는 점 A를 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 점이야.

한편, 점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 H라 하면

직선 BC의 기울기가 -1이므로 직각삼각형 BHC는

$\angle\mathrm{CBH}=\angle\mathrm{BCH}=45°$인 직각이등변삼각형이다.

직선 BC의 기울기가 -1이므로 직선 BC와 x축과 평행한 직선이 이루는 예각의 크기는 $45°$야.

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CH}}=2$이므로 점 C의 좌표는

직각이등변삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1:1:\sqrt{2}$야.

점 C는 점 B를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이야.

$(k-2,\ 2^{k-1}-7+2)$, 즉 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$이다.

2nd 세 점 A, B, C의 좌표를 구해.

점 C가 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로 $x=k-2$, $y=2^{k-1}-5$를 대입하면

$2^{k-1}-5=2^{k-2-1}+1$에서

$2^{k-1}-5=2^{k-3}+1$

$2^{k-1}-2^{k-3}=6$

$2^{k-3}(2^2-1)=6$

$2^{k-3}\times 3=6$, $2^{k-3}=2$

$a^{f(x)}=a^{g(x)}\ (a>0,\ a\ne 1)$이면 $f(x)=g(x)$

$k-3=1$

$\therefore k=4$

따라서 점 A의 좌표는 $(4,\ 2^{4-1}+1)$에서 $(4,\ 9)$, 점 B의 좌표는 $(4,\ 2^{4-1}-7)$에서 $(4,\ 1)$, 점 C의 좌표는 $(4-2,\ 2^{4-1}-5)$에서 $(2,\ 3)$이다.

선택과목: 확률과 통계

23 정답 ④ *중복순열 [정답률 84%]

정답 공식: 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$이다.

1st 중복순열의 수를 구하자.

${}_3\Pi_4=3^4=81$

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$

24 정답 ② *같은 것이 있는 순열－수 배열 [정답률 72%]

정답 공식: 여섯 자리의 자연수 중에서 홀수인 수를 구하려면 일의 자리의 수가 1 또는 3인 경우로 나눈다.

1st 일의 자리가 1일 때와 3일 때의 경우로 나누어 생각해.

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중

총 6개의 숫자 중에서 1이 2개, 2가 3개 있으므로 같은 것이 있는 순열을 이용하자.

홀수는 일의 자리의 수가 홀수이면 된다.

(i) 일의 자리의 수가 1인 경우 : □□□□□1

남은 다섯 자리에 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$

실수 홀수인 경우를 찾으려면 구체적으로 일의 자리의 수가 1 또는 3인 경우를 찾아야겠지? 이때, □나 _를 이용하여 구체적으로 여섯 자리의 자연수를 나타내야 풀이에 접근하기 쉬워.

(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우 : □□□□□3

남은 다섯 자리에 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$

(i)과 (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 자연수의 개수는

$20+10=30$

[합의 법칙] 동시에 일어나지 않는 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 경우의 수는 $n(A)+n(B)$야.

[다른 풀이]

여사건에 해당하는 자연수의 개수를 구하여 해당하는 경우의 수를 구해 보자.

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의

총 6개의 숫자 중에서 1이 2개, 2가 3개 있으므로 같은 것이 있는 순열을 이용하자.

개수는 $\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

[같은 것이 있는 순열] n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때 이를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

이 자연수가 짝수이려면 일의 자리의 수가 2여야 하므로

5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하면

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

□□□□□2와 같이 일의 자리에 2를 하나 고정시키고 남은 다섯 자리에 1, 1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수를 구해야 해.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $60-30=30$

자연수 배수의 특징 개념·공식

① 3의 배수 : 각 자리의 수의 합이 3의 배수인 수
② 6의 배수 : 각 자리의 수의 합이 3의 배수이면서 짝수인 수
③ 4의 배수 : 끝의 두 자리가 4의 배수인 수
④ 5의 배수 : 일의 자리의 수가 0 또는 5인 수

25 정답 ⑤ *원순열 [정답률 75%]

정답 공식: B 학교 학생끼리 이웃하지 않도록 앉혀야 하므로 이웃해도 되는 A 학교 학생을 먼저 앉힌다.

1st 먼저 이웃해도 되는 A 학교 학생을 앉히자.

A 학교 학생 5명을 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉히면

$(5-1)!=4!=24$

[원순열] 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

2nd 사이사이에 B 학교 학생을 앉히자.

A 학교 학생 사이에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

A 학교 학생 5명이 앉아 있으면 그 사이사이에는 다섯 자리가 있지? 따라서 다섯 자리 중에서 B 학교 학생 2명이 앉을 두 자리를 선택하는 거야.

3rd 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times20=480$

[다른 풀이]

여사건에 해당하는 경우의 수를 구하여 해당하는 경우의 수를 구해 보자.

먼저 7명의 학생을 일정한 간격으로 앉히는 전체 경우의 수는

$(7-1)!=720$ A 학교 학생 5명과 B 학교 학생 2명을 모두 합하면 총 7명이야.

한편, B 학교 학생 2명을 이웃하도록 앉히는 경우의 수는

$(6-1)!\times2!=240$

B 학교 학생 2명을 한 명으로 보면 전체 학생은 6명이지?
이 6명을 앉힌 후에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수를 곱해야 해.

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$

주의 n명을 묶어서 한 명으로 보면 반드시 $n!$(n명이 자리 바꾸는 경우)을 곱해줘야 해!

26 정답 ① *같은 것이 있는 순열 [정답률 75%]

정답 공식: n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

1st 문제 상황을 문자를 사용하여 나타내자.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.

2nd P지점을 지나기 전과 후로 나누어 생각하자.

A지점에서 P지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$

한 가지 방법으로 A지점에서 P지점으로 가는 경우와 a, a, b, b, b를 나열하는 한 가지 방법이 일대일대응을 이루고 있어.

P지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

3개의 a와 3개의 c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{3!\times3!}=20$

한 가지 방법으로 P지점에서 B지점으로 가는 경우와 a, a, a, c, c, c를 나열하는 한 가지 방법이 일대일대응을 이루고 있어.

3rd 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하자.

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $10\times20=200$

문제에서 A지점에서 P지점으로 가는 경우와 P지점에서 B지점으로 가는 경우가 서로 영향을 미치지 않아. 그렇기 때문에 A지점에서 P지점으로 가는 경우의 수와 P지점에서 B지점으로 가는 경우의 수를 곱의 법칙을 이용하여 곱해.

27 정답 ③ *중복조합의 이해 [정답률 55%]

정답 공식: 전체 경우의 수에서 첫 번째 칸과 두 번째 칸 둘 중 하나에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수를 뺀다.

1st 각 칸에 최대 넣을 수 있는 권 수가 제한되지 않을 때, 경우의 수를 구하자.

8권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

[중복조합의 수] ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

2nd 첫 번째 칸과 두 번째 칸 둘 중 하나에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수를 구하자.

책은 8권이니 두 칸 모두 동시에 6권 이상을 꽂을 수는 없어.

첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수는

먼저 첫 번째 칸에 6권의 책을 꽂고, 남은 2권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

꽂는 경우를 순서쌍으로 나타내면 (6, 2, 0), (6, 0, 2), (6, 1, 1), (7, 1, 0), (7, 0, 1), (8, 0, 0)이 돼.

같은 방법으로 두 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수를 구하면 6이다.

이것은 첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우에서 첫 번째 칸을 두 번째 칸으로 바꾸기만 하면 되므로 경우의 수는 똑같이 6이야.

3rd 여사건을 이용하여 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는

$45-6-6=33$

28 정답 ④ *중복순열－서로 다른 종류의 물건 [정답률 45%]

정답 공식: 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하인 경우에 대하여 학생 A가 사탕 1개는 꼭 받는 경우를 구한다.

1st 어떤 조건을 기준으로 경우를 나눌지 파악하자.

조건 (나)에서 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이므로

문제의 단서 조항에 2 이하라고 했기 때문에 학생 B가 받는 사탕의 개수가 0인 경우도 빠뜨리지 말고 반드시 고려해야 해.

학생 B가 받는 사탕의 개수를 기준으로 경우를 나눈 뒤 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받으면서 두 학생 A, C에게 남은 사탕을 나누어 주는 경우를 생각해야 한다.

2nd 학생 B가 받는 사탕의 개수가 2 이하인 경우의 수를 각각 구하자.

(i) 0개의 사탕을 받는 경우

남은 두 학생 A, C가 5개의 사탕을 받으므로

구하는 경우의 수는

${}_2\Pi_5-1=2^5-1=31$

함정 사탕의 종류가 서로 다르기 때문에 나누어 주는 사탕의 순서를 정할 수 있는 관계로 중복조합이 아닌 중복순열로 접근해야 해.

학생 C가 사탕을 모두 받으면 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받아야 한다는 조건을 만족시키지 못하므로 1가지 경우를 빼줘야 해.

[중복순열] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$

(ii) 1개의 사탕을 받는 경우

남은 두 학생 A, C가 4개의 사탕을 받으므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_1\times({}_2\Pi_4-1)=5\times(2^4-1)=75$

학생 C가 사탕을 모두 받으면 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받아야 한다는 조건을 만족시키지 못하므로 1가지 경우를 빼줘야 해.

(iii) 2개의 사탕을 받는 경우

남은 두 학생 A, C가 3개의 사탕을 받으므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_2\times({}_2\Pi_3-1)=10\times(2^3-1)=70$

학생 C가 사탕을 모두 받으면 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받아야 한다는 조건을 만족시키지 못하므로 1가지 경우를 빼줘야 해.

3rd 각 경우에 대하여 경우의 수를 구하여 모두 더하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$31+75+70=176$

[다른 풀이]

A, C가 받는 사탕의 개수를 순서쌍 (A, C)로 나타내면

학생 B가 받는 사탕의 개수가 0일 때,

$(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)$이므로 각각의 경우의 수는 ${}_5C_5$, ${}_5C_4$, ${}_5C_3$, ${}_5C_2$, ${}_5C_1$

${}_5C_5+{}_5C_4+{}_5C_3+{}_5C_2+{}_5C_1=31$

학생 B가 받는 사탕의 개수가 1이면 그 경우의 수는

${}_5C_1=5$이고,

$(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3)$이므로 각각의 경우의 수는 ${}_4C_4$, ${}_4C_3$, ${}_4C_2$, ${}_4C_1$

${}_4C_4+{}_4C_3+{}_4C_2+{}_4C_1=15$

$\therefore 5\times15=75$

학생 B가 받는 사탕의 개수가 2이면 그 경우의 수는

${}_5C_2=10$이고,

$(3, 0), (2, 1), (1, 2)$이므로 ${}_3C_3+{}_3C_2+{}_3C_1=7$ 각각의 경우의 수는 ${}_3C_3$, ${}_3C_2$, ${}_3C_1$

$\therefore 10\times7=70$

따라서 전체 경우의 수는 $31+75+70=176$

29 정답 65 *중복조합 – 함수의 개수 [정답률 27%]

(정답 공식: 중복조합을 이용하여 $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.)

1st 어떤 조건을 기준으로 경우를 나눌지 정하자.

함수 $f: X\longrightarrow Y$에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

공역 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

공역 Y의 원소 중 선택받은 치역의 원소는 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$야.
(이들 중에는 같은 수도 있을 수 있겠지? 예를 들어 $f(1)=-1, f(2)=-1$이면 $f(1)=f(2)$야.)

이때, 조건 (나)를 만족시키는 경우는 $-1+1=0$ 또는 $0+0=0$이므로

-1과 1을 적어도 1개씩 선택하거나 0을 적어도 2개 선택하는 경우를 생각하자.

2nd 각 경우마다 그 경우의 수를 구하자.

(i) 치역에 -1과 1이 포함되는 경우

-1과 1을 1개씩 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 나머지 함숫값 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

예를 들어 Y의 원소 중 $-1, 1$를 선택한 후, 다시 $0, 2, 2$를 선택하면 크기순으로 다시 나열한 $-1, 0, 1, 2, 2$가 각각 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$가 되는 거야.

${}_5H_3={}_7C_3=35$ [중복조합] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

(ii) 치역에 0이 포함되는 경우

0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 나머지 함숫값 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

${}_5H_3={}_7C_3=35$ [중복조합] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

(iii) 치역에 -1과 1, 0이 모두 포함되는 경우

-1, 1을 각각 1개씩, 0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 나머지 함숫값 1개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

그 경우의 수는 ${}_5H_1={}_5C_1=5$

[중복조합] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

3rd 경우의 수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35+35-5=65$

(iii)은 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 경우이므로 (iii)이 중복되어 있는 것이므로 (i)+(ii)의 경우의 수에서 (iii)의 경우의 수를 한 번은 빼야 해. 따라서 (i)+(ii)−(iii)을 계산해줘야 해.

30 정답 708 *같은 것이 있는 순열 [정답률 8%]

(정답 공식: 4개의 원판에 적힌 문자의 꼴이 XXYY 또는 XXYZ 또는 모든 문자가 다 다른 경우로 나눈다.)

1st 어떠한 조건을 기준으로 경우를 나눌지 정하자.

문제 조건을 만족시키도록 원판을 쌓는 경우의 수는 원판에 적힌 문자를 나열하는 경우의 수와 같다.

색깔과 상관없이 원판에 적힌 문자만 고려하면 조건 (가), (나)에 의하여 순서는 저절로 정해지거나 나중에 고려하면 돼.

조건을 만족시키는 경우는 4개의 원판에 적힌 문자의 꼴이 XXYY

동일한 문자 2개씩 2쌍을 선택하는 경우야.

또는 XXYZ 또는 모든 문자가 다 다를 때이므로 각 경우를 나누어 보자.

2개의 문자만 동일하고 남은 2개는 서로 다른 경우야.

2nd 각 경우마다 그 경우의 수를 구하자.

(i) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY 꼴인 경우

4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 이렇게 선택한 4개의 문자를 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

(ii) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ 꼴인 경우

4개의 문자 중 X를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

이 문자를 제외한 나머지 2개의 문자를 정하여 Y, Z를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$,

Y, Z가 적힌 원판의 색을 선택하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

서로 동일하지 않은 두 문자에 대해서는 실제 원판의 색을 정해야 하므로 흰색과 검은색 중에서 중복순열을 이용하여 원판의 색을 정할 수 있어.

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 이렇게 선택한 4개의 문자를 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times3\times4\times12=576$

(iii) 4개의 원판에 적힌 모든 문자가 다 다를 때

각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 조건 (나)에 의하여 D가 적힌 원판을 맨 아래에 놓고, 나머지 3개의 원판의 순서를 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $16\times6=96$

3rd 구하는 경우의 수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $36+576+96=708$

선택과목: 미적분

23 정답 ② *등비수열의 극한값의 계산 [정답률 92%]

(정답 공식: $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$이다.)

1st 분모에서 밑이 가장 큰 3^n으로 분자, 분모를 나누자.

주어진 식의 분자, 분모를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

$$=\frac{2\times0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$$

$0<\frac{2}{3}<1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, $-1<-\frac{2}{3}<0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$임을 이용한 거야.

24 정답 ⑤ *치환을 이용한 수열의 극한 [정답률 71%]

(정답 공식: $3a_n-5n=b_n$으로 치환하고 a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸 후, 수열의 극한의 성질을 이용한다.)

1st $3a_n-5n=b_n$으로 치환하자.

$b_n=3a_n-5n$이라 하면 $a_n=\frac{b_n+5n}{3}$ … ㉠

또한, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$ … ㉡

2nd 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2}\times\frac{b_n+5n}{3}\right)\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(b_n\times\frac{1}{n}+5\right)}{12}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이고, 수렴하는 두 수열 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}c_nd_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n\times\lim\limits_{n\to\infty}d_n$이 성립함을 이용하면 돼.

$$=\frac{(2+0)(2\times0+5)}{12}\ (\because ㉡)$$

$$=\frac{5}{6}$$

25 정답 ④ *∞−∞ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정 [정답률 75%]

(정답 공식: 근호가 포함된 ∞−∞ 꼴의 극한은 유리화하여 극한값을 구한다.)

1st $\sqrt{\ }$가 있으니까 유리화하여 극한값을 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

무리식이 포함된 ∞−∞ 꼴의 극한이므로 유리화하기 위해 분모, 분자에 $\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}$을 각각 곱한 거야.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

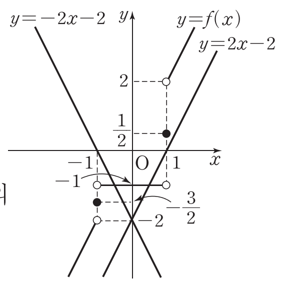
이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$ (a는 상수)

$$\frac{a+1}{2\sqrt{a}}=\frac{5}{4}$$

2nd 함수 $g(t)$를 구하자.

실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수 $f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하므로 다음과 같이 t의 값의 범위에 따라 교점의 개수를 구하여 $g(t)$를 구하자.

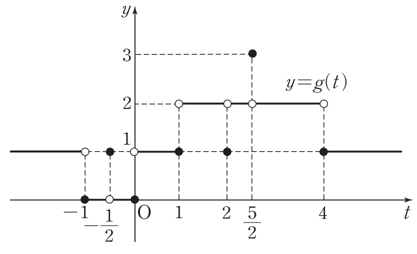
직선 $y=tx-2$에서 t는 기울기를 나타내지? y절편은 -2로 정해졌으니까 기울기에 따라 교점의 개수가 정해져.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구하면

$$g(t)=\begin{cases} 3 & \left(t=\frac{5}{2}\right) \\ 2 & \left(1<t<2 \text{ 또는 } 2<t<\frac{5}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{2}<t<4\right) \\ 1 & \left(t<-1 \text{ 또는 } t=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } 0<t\leq 1 \text{ 또는 } t=2 \text{ 또는 } t\geq 4\right) \\ 0 & \left(-1\leq t<-\frac{1}{2} \text{ 또는 } -\frac{1}{2}<t\leq 0\right) \end{cases}$$

함수 $y=g(t)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



3rd 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 구하여 $m\times a_m$의 값을 구해.

함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$a_1=-1,\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=0,\ a_4=1,\ a_5=2,\ a_6=\frac{5}{2},\ a_7=4$$

따라서 함수 $g(t)$에 대하여 불연속인 a의 개수는 7이므로 $m=7$

또, $a_m=a_7=4$ $\quad\therefore m\times a_m=7\times 4=28$

30 정답 80 ＊좌표평면에서 도형의 넓이에 대한 극한 [정답률 23%]

정답 공식: 점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이용하면 $f(n)-g(n)$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

1st 점 P_n의 x좌표를 n에 대한 식으로 나타내자.

점 P_n이 곡선 T_n 위에 있으므로 점 P_n의 좌표를

$P_n\left(t_n,\ \frac{\sqrt{3}}{n+1}t_n^2\right)(t_n>0)$이라 놓자.

곡선 T_n의 x좌표가 0보다 크거나 같고, 자연수 n에 대하여 $\overline{OP_n}=2n+2$이므로 $t_n>0$

$\overline{OP_n}=2n+2$이므로

$$\sqrt{t_n^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t_n^2\right)^2}=2n+2$$

[좌표평면에서의 두 점 사이의 거리] 좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

양변을 제곱하면

$$t_n^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t_n^2\right)^2=4(n+1)^2$$

$$t_n^2+\frac{3}{(n+1)^2}t_n^4=4(n+1)^2$$

$$3t_n^4+(n+1)^2t_n^2-4(n+1)^4=0$$

$$\{3t_n^2+4(n+1)^2\}\{t_n^2-(n+1)^2\}=0$$

이때, $t_n>0$이고 n은 자연수이므로 $3t_n^2+4(n+1)^2>0$

즉, $t_n^2-(n+1)^2=0$이어야 한다.

$t_n^2=(n+1)^2$ $\quad\therefore t_n=n+1\ (\because t_n>0)$

2nd $f(n)-g(n)$을 n에 대한 식으로 나타내자.

점 P_n의 좌표가 $P_n(n+1,\ \sqrt{3}(n+1))$이므로 $H_n(n+1,\ 0)$이고,

직각삼각형 P_nOH_n에서

$\overline{OH_n}:\overline{P_nH_n}=(n+1):\sqrt{3}(n+1)=1:\sqrt{3}$이므로

$$\tan(\angle P_nOH_n)=\frac{\overline{P_nH_n}}{\overline{OH_n}}=\frac{\sqrt{3}(n+1)}{n+1}=\sqrt{3}$$

즉, $\angle P_nOH_n=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle OP_nH_n=\frac{\pi}{6}$

$$\angle R_nP_nH_n=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

두 삼각형 P_nR_nO와 P_nH_nO에서 $\angle P_nR_nO=\angle P_nH_nO=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OP_n}$은 공통, $\overline{R_nO}=\overline{H_nO}$이므로 두 삼각형 P_nR_nO와 P_nH_nO는 합동이야.

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.

곡선 T_n과 x축, 선분 P_nH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

[곡선과 x축 사이의 넓이] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b|f(x)|\,dx$

$$f(n)+h(n)=\int_0^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2\ \cdots\ ㉠$$

점 Q_n을 포함하는 호 R_nH_n과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고,

이것은 사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 $P_nR_nH_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

두 삼각형 P_nR_nO와 P_nH_nO는 합동이므로
(사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이)
$=$(삼각형 P_nR_nO의 넓이)$+$(삼각형 P_nH_nO의 넓이)
$=2\times$(삼각형 P_nH_nO의 넓이)

중심각의 크기가 θ이고, 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$

$$g(n)+h(n)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OH_n}\times\overline{P_nH_n}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{P_nH_n}^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=(n+1)\times\sqrt{3}(n+1)-\frac{\pi}{6}\times 3(n+1)^2$$

$$=\sqrt{3}(n+1)^2-\frac{\pi}{2}(n+1)^2\ \cdots\ ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$f(n)-g(n)=\frac{\pi}{2}(n+1)^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}(n+1)^2=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2\ \cdots\ ㉢$$

3rd $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}$의 값을 구하자.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\frac{(n+1)^2}{n^2}\right\}\ (\because ㉢)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right\}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4th $60k^2$의 값을 구하자.

$\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{2}+k$이므로 $k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore 60k^2=60\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=80$

선택과목: 기하

23 정답 ② ＊포물선의 초점과 준선 [정답률 91%]

정답 공식: 포물선 $y^2=4px$ 위의 임의의 점 P와 초점 $F(p,\ 0)$ 사이의 거리는 점 P에서 준선 $x=-p$까지의 거리와 같다.

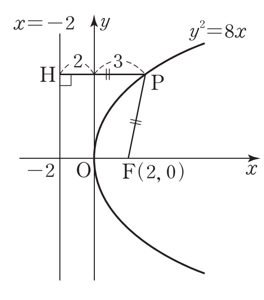
1st 포물선의 정의를 이용하여 선분 PF의 길이를 구해.

포물선의 방정식이 $y^2=8x=4\times 2\times x$이므로

$y^2=4px$의 초점의 좌표는 $(p,\ 0)$이야.

포물선의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고

준선의 방정식은 $x=-2$이다.



그림과 같이 포물선 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}$

포물선 위의 점에서 준선과 초점까지의 거리는 같아.

이때 점 P와 y축 사이의 거리가 3이므로

$\overline{PH}=2+3=5$

따라서 $\overline{PF}=\overline{PH}=5$

$\overline{PH}=|$(준선과 x축의 교점의 x좌표)$|+|$(점 P의 x좌표)$|$

24 정답 ⑤ ＊타원의 초점과 단축, 장축 [정답률 90%]

정답 공식: 두 초점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$ $(c>0)$에서의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>a>0$, $c^2=b^2-a^2$)이고 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$이다.

1st 두 초점의 좌표와 타원이 y축과 만나는 점을 이용하여 타원의 단축의 길이를 구해.

두 초점의 좌표가 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$인 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이라 하면 $b^2-a^2=3^2=9$이고

타원이 y축과 만나는 점 $(0,\ 7)$은 장축의 한 끝점이므로 $b=7$

$b^2-a^2=9$에서 $b=7$이므로 $49-a^2=9$

$a^2=40$ $\quad\therefore a=2\sqrt{10}$

따라서 타원의 단축의 길이 $2a=4\sqrt{10}$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$의 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$야.

25 정답 ④ ＊쌍곡선의 평행이동 [정답률 87%]

정답 공식: 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm 1$의 꼴로 정리하면 점근선의 방정식은 $y-n=\pm\frac{b}{a}(x-m)$이다.

1st 주어진 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식을 구해.

쌍곡선의 방정식 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$을 변형하면

완전제곱식으로 변형해.

$$4(x^2-2x+1)-(y^2+6y+9)-4=0$$

$$4(x-1)^2-(y+3)^2=4$$

$$\therefore (x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$