1 판매량

1 만족도

1 평가도

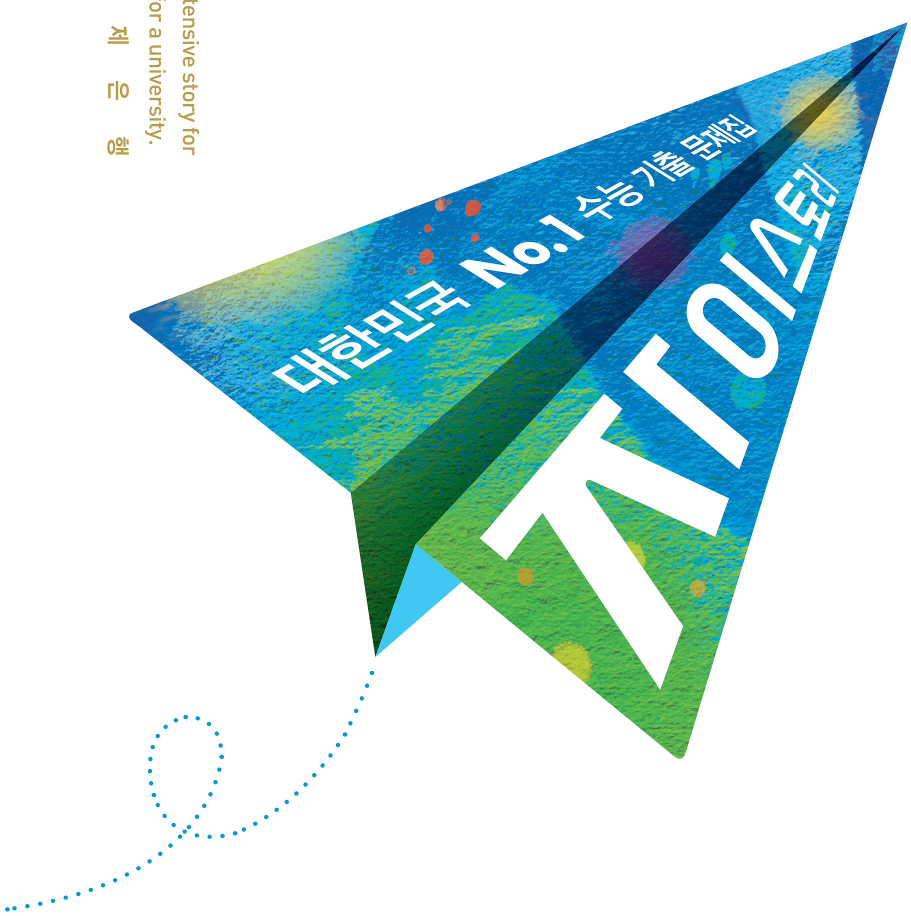
KOREA EDUCATIONAL BRAND AWARDS 대한민국 교육브랜드 대상 2022

Xistory stands for extra intensive story for an entrance examination for a university.

수능기출문제은행

2024 수능 대비

Xi story



고3 수학 I

- ▲ 최신 9개년 수능, 모의평가, 학력평가 기출문제 수록
  - 최신 8개년 경찰대, 삼사 기출문제 수록
- ▲ 총 159개 촘촘한 유형 분류와 난이도순 문항 배열
- ▲ 1등급, 2등급 킬러 문제 + 단서, 접근법, 1등급 풀이팁 해설
- ▲ 다른 풀이, 쉬운 풀이, 톡톡 풀이 등 다양한 풀이법 수록
- ▲ 함정, 실수, 주의, 단계별로 분석한 입체 첨삭 해설
- ▲ 명쾌한 개념 강의 + 최신·중요 문제 동영상 강의 QR코드

강남구청 인터넷 수능방송 강의교재

수경출판사

오 석 우

서울대 의예과 2022년 입학
공주 한일고 졸

Xi story Honors
[장려상 수상]

“실수한 것들이 있으면 그 상황 자체를 실수 노트에 따로 정리했어!”

■ 내신과 수능은 기출문제집으로 잡았어

나에게 수학은 가장 어려운 과목이었어. 그래서 선생님과 수학을 잘하는 선배님들에게 학습 방법에 관해 조언을 구했지. 그런 조언 때문에 개념학습 후 자이스토리를 여러 번 풀기를 반복하여 결국 내신과 수능을 모두 잡을 수 있었어.

■ 목차와 학습계획표를 잘 활용해

교재 앞부분에는 단원별, 유형별로 문항들이 정리된 목차와 학습계획표가 있어. 보통은 목차와 학습계획표를 무시하고 바로 문제를 푸는 경향이 있는데 나는 이 둘을 적극적으로 활용하여 보다 체계적인 공부를 할 수 있도록 계획했어. 우선 일별 학습 계획과 복습 계획을 짜고, 이를 성실하게 이행했어. 만약 계획표를 지키기 어려울 경우 친구와 경쟁하듯이 학습하면 좋아. 특히 교재를 활용해 스스로 공부하는 사람들의 경우 목차와 계획표를 적극적으로 활용해 진도를 조절하여 공부하면 우왕좌왕하지 않게 될 거야.

■ 해설지와 해설 강의를 적극 이용하자!

몇몇 친구들은 교재의 해설지가 두껍고, 해설지와 해설 강의를 확인하기 귀찮다는 이유로 그냥 넘어가곤 하는데, 나는 틀린 문제들을 해설지와 해설 강의로 꼭 확인했어. 맞은 문제 중에서도 조금 헷갈리거나 어려웠던 문항들은 해설지와 해설 강의를 꼭 확인했어. 맞은 문제까지도 해설지와 해설 강의를 확인했던 이유는 올바르게 풀지 않아도 답을 맞출 수 있기 때문이야.

실제로 우리는 수학 문제를 풀 때 많은 경우 직관을 가장한 찍기를 하곤 하지. 물론 이렇게 푸는 경우도 가끔 있지만 실전에서는 비슷한 문제가 출제되면 풀이법이 생각이 나지 않을 수 있기 때문에 해설의 올바른 풀이도 반드시 익혀놔야 한다고 생각해. 시간 낭비라고 생각하지 말고 해설을 꼭 확인해보자.

■ 나만의 수학 노트를 만들어 이용하자!

나는 수학 공부에서 가장 중요한 것 중 하나가 수학 노트라고 생각해. 시험 직전에 볼 수 있는 자신만의 노트를 만드는 것이 중요해.

먼저, 노트에 해당 단원에서 헷갈리는 공식들과 개념을 정리해. 다음은 해당 단원에서 시험 직전에 꼭 다시 봐야 할 문항들을 적고, 그 문항의 핵심 키워드를 정리해.

빠른 시간 내에 오답노트를 살펴보려면 문항별로 키워드를 적어두는 것이 좋아. 예를 들어 ‘17번 문항에서는 미분가능성 조건을 활용해 미분계수가 같다는 조건을 활용해야 했다’와 같이 키워드로 한 줄 정리를 해놓으면 복습할 때도 빠르게 기억할 수 있게 되지.

마지막으로, 나만의 실수노트를 만들었어. 내가 수학 시험에서 가장 피해야 할 상황은 올바르게 접근했음에도 실수 때문에 틀리는 것이라고 생각해.

평소에 수학 공부를 하다가 실수한 것들이 있으면 그 상황 자체를 실수노트에 따로 정리해 두었어.

시험 직전에 실수노트만을 빠르게 훑어보았고, 실전에서 실수를 많이 줄일 수 있었어.

■ 공부했던 너덜너덜해진 교재를 보고 확신을 가져봐!

입시를 준비하는 거의 대부분은 과연 내가 시험을 잘 볼 수 있을지 걱정될 거야.

나는 수능 전날 공부를 하기보단 내가 공부했던 너덜너덜해진 책을 보며 성적을 잘 받을 수밖에 없다는 확신을 갖도록 했어.

이런 경험이 모두에게도 있기를 바랄게~

문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
수학이 쉬워집니다!

수학 공부의 기본은 개념을 익히고 그 개념들을
연결하여 그 흐름을 파악하는 것입니다.
만일 이를 소홀히 하고, 의미없이 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
수학을 오랜 시간 공부해도 좋은 점수를 받기 힘듭니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를
개념의 연계성에 따라 명쾌하게 분석하고, 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 정확히 파악되고 문제 풀이가 쉬워져서
수학 공부가 즐거워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있도록 도와줍니다.

1등급 킬러 문항에는 문제 분석, 풀이 단서 체크, 1등급 풀이 Tip,
서울대 선배의 My Top Secret을 함께 제공하여
체계적이고 심도있게 고난도 킬러 문제를 훈련할 수 있습니다.

자이스토리 수학이 준비한 수능 맞춤 기본 개념과 유형을
순서대로 꾸준히 공부해 보세요.
이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –

수능 1등급 완성 학습 계획표 [35일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~52		월 일	월 일
2	53~97		월 일	월 일
3	98~123		월 일	월 일
4	B 01~53		월 일	월 일
5	54~102		월 일	월 일
6	103~142		월 일	월 일
7	C 01~52		월 일	월 일
8	53~103		월 일	월 일
9	104~144		월 일	월 일
10	145~176		월 일	월 일
11	D 01~49		월 일	월 일
12	50~95		월 일	월 일
13	96~138		월 일	월 일
14	139~176		월 일	월 일
15	E 01~58		월 일	월 일
16	59~109		월 일	월 일
17	110~154		월 일	월 일
18	155~194		월 일	월 일
19	F 01~54		월 일	월 일
20	55~98		월 일	월 일
21	G 01~58		월 일	월 일
22	59~110		월 일	월 일
23	111~159		월 일	월 일
24	160~197		월 일	월 일
25	198~237		월 일	월 일
26	H 01~52		월 일	월 일
27	53~102		월 일	월 일
28	103~151		월 일	월 일
29	152~193		월 일	월 일
30	I 01~44		월 일	월 일
31	45~88		월 일	월 일
32	89~130		월 일	월 일
33	모의 1회		월 일	월 일
34	모의 2회		월 일	월 일
35	모의 3회		월 일	월 일

- 나는 ______________ 대학교 ______________ 학과 __________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 고3 수학 Ⅰ 활용법+α

❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- [개념 보충 +], [한 걸음 더], [왜 그럴까?] 코너를 통해 실전에 활용할 수 있는 유용한 지식을 습득하세요.
- 개념을 확인한 후 최신 출제 경향을 반드시 확인하세요.
- 개념을 바로 적용해서 기본 기출 문제를 풀어 보면 개념이 더욱 명확해질 거예요.

❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 수능뿐만 아니라 모의고사에서 출제되는 모든 유형을 촘촘히 분류하여 더욱 체계화된 유형별 풀이 비법을 확인할 수 있습니다.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 처음부터 끝까지 혼자 힘으로 문제를 풀어보면서 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

❹ 1등급을 좌우하는 킬러 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 고난도 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요. 이를 통해 자신에게 취약한 개념을 다시 한 번 파악하고 반드시 되짚어 보세요.
- 해설에서 1등급 킬러 문항의 문제 분석, 풀이 단서 체크, 1등급 심화 특강, 1등급 풀이 Tip과 서울대 선배의 My Top Secret의 특별 해설을 통해 문제 해결 방향과 쉽게 해결할 수 있는 방법을 익히세요.

❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [정답 공식]을 통해 핵심키를 파악할 수 있을 거예요.
- [단서]를 통해 문제에 주어진 조건들을 어떻게 파악해야 하고 푸는 방향을 잡아야 하는지 알 수 있을 거예요.
- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.

❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

차 례 [총 159개 유형 분류]

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수열

Special 수학 I 실전 기출 모의고사

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
'수학문제 다깨기'

수능 개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

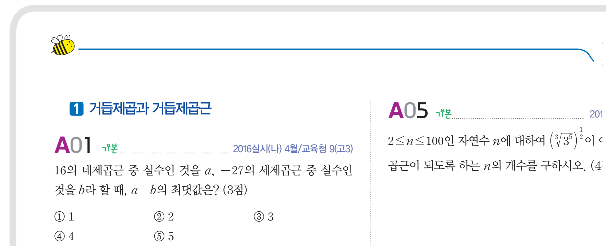
1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2023학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시

2 기본 기출 문제 – 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.



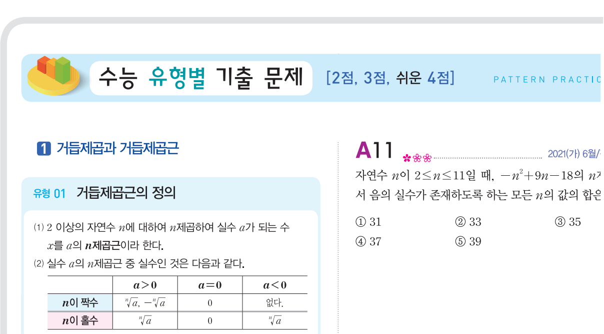
- **출처표시** : 수능 / 평가원 / 삼사 / 경찰대 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도

예) 2023대비 수능 11(고3) : 2022년 11월에 실시한 수능
2022/수능(홀) 12(고3) : 2021년 11월에 실시한 수능
2023대비 6월 모평 13(고3) : 2022년 6월에 실시한 평가원
2022 9월/평가원 14(고3) : 2021년 9월에 실시한 평가원
2022실시 7월 학평 15(고3) : 2022년 7월에 실시한 학력평가
2021실시 10월/교육청 16(고3) : 2021년 10월에 실시한 학력평가

3 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

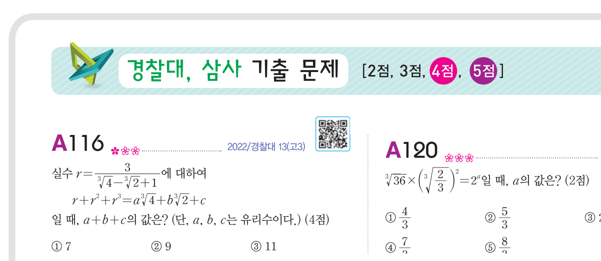
최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **유형 분류** : 빈출 – 시험에서 자주 출제되는 유형입니다.
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- **난이도** : ❀❀❀ – 기본 문제　❀❀❀ – 중급 문제
  ❀❀❀ – 중상급 문제
- **QR코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



4 경찰대·삼사 기출 문제 – 최신 기출 문제 전부 수록

경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.



5 수학 Ⅰ 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

6 1등급 마스터 문제 – 1등급 킬러, 2등급 킬러, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ✽✽✽ – 상급 문제
- 2등급 킬러 – 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 킬러 – 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 킬러 + 1등급 킬러]

7 1등급 킬러 · 2등급 킬러 문제 특별 해설

문제 분석
킬러 문제의 핵심 내용과 문제에서 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

풀이 단서 체크
킬러 문제 풀이를 본격적으로 시작하기 전에 단서의 내용을 좀 더 구체적으로 설명하면서 풀이 과정을 요약하여 알기 쉽게 풀어 써 주었습니다.

1등급 심화 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 공식을 보여줍니다.

1등급 풀이 Tip
일반적인 내용은 아니지만 킬러 문제를 풀 때 시간 절약과 더불어 문제 접근을 쉽게 할 수 있도록 도와주는 내용을 제시합니다.

My Top Secret
킬러 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

8 입체 첨삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외고
박숙녀 아산 충남삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 일등급 수학 저자
이창희 서울 다원교육 고등부
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외고
장경호 오산 운천고
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
지강현 안양 신성고
홍지우 안양 평촌고

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
'수학문제 다깨기'

[감수진]

강민정 전주 유일여고
강호균 서울 늘푸른 수학원
공상태 성남 THE99.7 학원
곽석환 울산 곽쌤수학 학원
구태현 고양 현수학 학원
권은진 서울 참수학뿌리국어학원
금재윤 서울 성보고
김광찬 울산 탑엘리트학원
김기웅 구미 브리튼 영어 수학 학원
김덕한 대전 더칸수학학원
김도완 안양 평촌 프라매쓰 학원
김동준 고양 이루는 학원
김병섭 울산 으뜸수학 학원
김상구 서울 같이상승수학 학원
김상혁 양주 덕정한샘학원
김성주 용인 수학의 아침 학원
김수환 청주 세광고
김예찬 울산 학촌학원
김윤환 대전 서대전고
김은희 서울 공감수학교습소 학원
김정선 안양 평촌 파인만학원
김정호 청주 청주고
김제휘 울산 샤수학 학원
김종성 서울 중산고
김주성 대전 양영학원
김중엽 울산 수수깡수학학원
김태은 성남 수학의 아침 학원
김현철 고양 문명의STEM 학원
김홍수 서울 김홍학원
김효령 전주 메리트수학전문학원
노문호 청주 한국교원대부고
박기두 서울 종로학원
박미경 부천 대치수심수학학원
박세창 서울 수본수학학원
박연오 청주 충북여고
박우혁 서울 종로학원
박종규 울산 4인의수학 학원
백준석 안양 일프로집단 학원
서동원 대전 수학의 중심 학원
성수경 울산 위룰수학 학원
손정민 서울 이투스247학원
신선학 울산 신쌤플러스수학전문학원
심창섭 서울 피앤에스수학학원
안영대 대구엠프로수학학원
안 혁 울산 혁신수학전문학원
안현모 서울 에임학원
양해영 서울 청출어람 학원
엄보용 안산 경안고
엄순섭 울산 전하수력발전소 단과학원
유수하 안양 유수하 수학 학원
유재영 평택 비전고
유재철 서울 구주이배 수학 학원
유 환 부천 도당비전스터디 학원
윤석주 대전 윤석주수학전문학원
윤석태 성남 수학의 아침 학원
윤소라 대전 텀브&포스학원
윤순조 군포 군포고
이건우 서울 이지엠 수학 학원
이대권 성남 폴라리스 수학 학원
이도용 대전 보문고
이동권 서울 수재학원
이동준 서울 수재학원
이동훈 대구 이동훈수학학원
이미리 수원 대상학원
이성우 울산 더오름 단과학원
이용환 대전 지족고
이윤주 평택 평택고
이은정 서울 서초 뉴탑학원
이주경 서울 생각의 숲 수학교습소
이지훈 서울 대치 시그니처학원
이철호 안양 파스칼수학학원
이호균 인천 투스카이수학과학학원
이효진 대구 진선생 수학 학원
임안철 안양 에이엠수학학원
장준수 고양 위드쌤 스터디 수학학원
장현주 수원 마스터제이 학원
장혜민 성남 수학의 아침 학원
전수현 서울 전)페르마수학 학원
정영수 서울 수재학원
정원혁 서울 하이츠 학원
정정은 서울 영매쓰 학원
정한샘 서울 편수학 학원
조재현 울산 피타고라스 수학 학원
주은재 서울 강동 청산학원
차승진 청주 청원고
최선락 서울 최선락수학교실 학원
최소영 서울 청산미래와사람들 학원
하대용 구미 수플러스학원
하진수 대전 대신고
현재명 양주 옥정대성N학원
홍성문 시흥 홍성문 수학학원
황화연 전주 근영여고

[My Top Secret 집필]

정호재 서울대 경제학부
곽지훈 서울대 수학교육과
황대윤 서울대 수리과학부

수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

2023 응시


강 한
서울 배재고 졸업


권주원
서울 배재고 졸업


김보겸
광주서석고 졸업


김수정
부산국제고 졸업


김예온
부산 다대고 졸업


김준서
부산 대연고 졸업


김태산
광주서석고 졸업


김현서
경기 평택고 졸업


나인규
광주 국제고 졸업


명준하
광주서석고 졸업


박서영
부산 사직여고 졸업


박세민
광주 광덕고 졸업


백규민
대구 성화여고 졸업


선명신
순천복성고 졸업


유기범
익산 남성고 졸업


이민형
광주 보문고 졸업


이서영
대구 원화여고 졸업


장경은
서울 세화여고 졸업


장성욱
부산 대연고 졸업


정서린
서울 세화여고 졸업


조해인
서울 목동고 졸업


조현준
익산 이리고 졸업


최윤성
서울 양정고 졸업


홍지형
화성 안화고 졸업


홍채연
서울 한영고 졸업


황은준
경기 비봉고 졸업

• 2022년

강민성 부산 해운대고 졸 (성균관대 의예과)
강연욱 서울 한영고 졸 (연세대 노어노문학과)
고현웅 광주서석고 졸 (전남대 의예과)
공준형 경기 우성고 졸 (가톨릭관동대 의예과)
김서윤 경기 우성고 졸 (성균관대 글로벌경제학과)
김예리 서울 수명고 졸 (고려대 의예과)
김찬우 익산 이리고 졸 (전남대 의예과)
김혜윰 경기 숭신여고 졸 (서울대 인문대학)
박정빈 익산 이리고 졸 (고려대 한국사학과)
박준현 전남 장성고 졸 (육군사관학교)
송홍준 광주 국제고 졸 (고려대 융합에너지공학과)
양예진 전주 상산고 졸 (이화여대 의예과)
오석우 공주 한일고 졸 (서울대 의예과)
오연주 전주 솔내고 졸 (서강대 사회학과)
이수현 대구 송현여고 졸 (고려대 정치외교학과)
장인우 광주 고려고 졸 (서울대 인문학부)
전수현 경기 숭신여고 졸 (한림대 의예과)
정지호 익산 남성고 졸 (경찰대학교)
최준명 서울 양정고 졸 (KAIST 새내기과정학부)

• 2021년

강혜윤 경기 수지고 졸 (서울대 인문계열)
김도원 인천하늘고 졸 (서울대 화학부)
김도훈 서울 배재고 졸 (고려대 노어노문학과)
김민준 서울 장훈고 졸 (연세대 전기전자공학부)
김재서 서울 양정고 졸 (연세대 산업공학과)
김준형 서울 중산고 졸 (경북대 치의예과)
박재현 경북 구미고 졸 (가톨릭대 의예과)
송의현 안산 동산고 졸 (원광대 의예과)
안지연 서울 창덕여고 졸 (서울대 인문계열)
윤 혁 서울 동양고 졸 (서울대 건설환경공학부)
이새영 서울 선린인터넷고 졸 (연세대 기계공학부)
이우민 경기 평택고 졸 (KAIST 새내기과정학부)
임예은 경기 동탄국제고 졸 (연세대 경제학과)
임종민 경기외고 졸 (서강대 정치외교학과)
최서영 경기 동탄국제고 졸 (서울대 경제학부)
최주영 서울 보인고 졸 (가톨릭대 의예과)

문항 배열 및 구성 [1502제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제(67제)

필수 개념과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록(538제)

최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.

❸ 수능, 평가원 및 학력평가, 경찰대, 삼사 우수 기출 문제 수록(894제)

- 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.
- 경찰대, 삼사 기출 문항 중 최신 3개년은 전 문항 수록하였고, 이전 문항은 우수 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 새수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제(70제)

새수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 수학 Ⅰ 수록 문항 구성표]

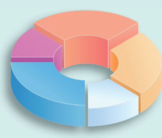
대비연도	3월	4·5월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2023	11	11	11	11	11	11	11	77	*2024학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2022	11	11	11	11	11	11	11	77	
2021	27	29	19	20	16	19	17	147	
2020	16	14	7	8	6	7	8	66	
2019	18	15	7	8	9	6	10	73	
2018	18	13	6	11	9	5	7	69	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2017	11	8	8	6	9	8	7	57	
2016	22	17	12	8	5	6	8	78	
2015	3	7	13	7	9	5	9	53	
2014	9	6	11	4	9	3	9	51	
2013	5	5	9	1	4	0	7	31	
2012	5	6	8	4	5	2	8	38	
2011	6	6	10	2	4	3	8	39	
2010	3	5	11	6	8	2	9	44	
2009	3	1	13	7	10	2	9	45	
2008이전	13	12	33	10	32	10	67	177	
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								26	
수능 기출 변형 문제								70	
고1/고2 학력평가								170	
경찰대 및 삼사								114	
총 문항 수								1502	

2023학년도 6월, 9월 평가원+수능

수학Ⅰ+수학Ⅱ 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
1	수Ⅰ	A47	수Ⅰ	A49	수Ⅰ	A52
2	수Ⅱ	C64	수Ⅱ	C56	수Ⅱ	A104
3	수Ⅰ	E45	수Ⅰ	E120	수Ⅰ	G124
4	수Ⅱ	A53	수Ⅱ	B18	수Ⅱ	C41
5	수Ⅰ	G103	수Ⅰ	G31	수Ⅰ	E127
6	수Ⅱ	B19	수Ⅱ	D107	수Ⅱ	D106
7	수Ⅰ	E80	수Ⅰ	H96	수Ⅰ	H100
8	수Ⅱ	D13	수Ⅱ	D19	수Ⅱ	D21
9	수Ⅱ	E57	수Ⅰ	E168	수Ⅰ	E106
10	수Ⅰ	F28	수Ⅱ	G75	수Ⅱ	G47
11	수Ⅱ	G90	수Ⅰ	A19	수Ⅰ	F39
12	수Ⅰ	H64	수Ⅱ	A173	수Ⅱ	F151
13	수Ⅰ	G163	수Ⅰ	F36	수Ⅰ	H106
14	수Ⅱ	F164	수Ⅱ	F154	수Ⅱ	B110
15	수Ⅰ	I115	수Ⅰ	I114	수Ⅰ	I113
16	수Ⅰ	D68	수Ⅰ	D72	수Ⅰ	D71
17	수Ⅱ	F25	수Ⅱ	F27	수Ⅱ	F24
18	수Ⅰ	H31	수Ⅰ	H21	수Ⅰ	H20
19	수Ⅱ	D108	수Ⅱ	E35	수Ⅱ	E24
20	수Ⅱ	F160	수Ⅱ	G37	수Ⅱ	G91
21	수Ⅰ	B128	수Ⅰ	C159	수Ⅰ	D163
22	수Ⅱ	B115	수Ⅱ	E123	수Ⅱ	E121

- 수Ⅰ : 2023 자이스토리 고3 수학Ⅰ
- 수Ⅱ : 2023 자이스토리 고3 수학Ⅱ



A 지수

★ 유형 차례

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2023	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 03 거듭제곱근의 활용 유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿✿❀ ❀❀❀
	6월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2022	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 03 거듭제곱근의 활용 유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿✿❀ ❀❀❀
	예시	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2021	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산 유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈)	❀❀❀ ❀❀❀
	9월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 01 거듭제곱근의 정의 유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿❀❀ ❀❀❀

★ 2023 수능 출제 경향 분석

• **지수법칙 – 밑이 같은 계산** : 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 계산하는 기본 개념과 계산력을 판단하는 문제가 출제되었다.

[A52 문항]

★ 2024 수능 예측

1. 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제가 출제 예상된다.
   기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다.
2. 지수법칙을 이용하는 간단한 계산 문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 항상 출제된다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
3. 지수를 포함한 등식의 활용 문제가 출제 예상되므로 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습을 해야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.

A 지수

개념 강의

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근[1] — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 a와 자연수 n에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

2^3 ← 지수, ↑ 밑

와 같이 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 한다.
또, a의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고,
a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수,
즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.
이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.[2]

① **n이 짝수일 때**

$a>0$이면 양수 $\sqrt[n]{a}$와 음수 $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고,
그 절댓값은 같다.
$a=0$이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.
$a<0$이면 없다.

② **n이 홀수일 때**

a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

출제 2023 9월 모평 11번

★ 거듭제곱근의 정의를 이용하는 문제들이 꾸준히 출제되고 있다. n제곱근의 n이 짝수 또는 홀수이냐에 따라 실근의 개수가 달라지는 문제도 종종 출제되고 있으므로 거듭제곱근의 정의를 확실히 알고 있어야 한다.
그리고 최근 출제 빈도가 높아지고 있는 거듭제곱근이 자연수 또는 유리수가 되는 조건을 반드시 알아둘 필요가 있다.

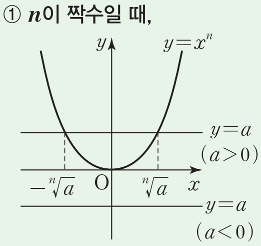
+개념 보충

1 $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

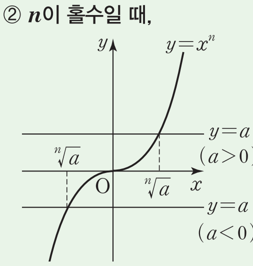
n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$

왜 그럴까?

2 ① n이 짝수일 때,



② n이 홀수일 때,



2 거듭제곱근의 성질[3] — 유형 02~03

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

한걸음 더!

3 $a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때,
$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

3 지수의 확장[4] — 유형 04~12

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (단, $a>0$, n은 자연수)

(2) **지수가 유리수인 경우**

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ (단, $a>0$, m, n은 정수, $n>0$)

(3) **지수법칙**[5]

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,

① $a^xa^y=a^{x+y}$ 예 $2^2\times2^3=2^{2+3}=2^5$

② $a^x\div a^y=a^{x-y}$ 예 $3^5\div3^2=3^{5-2}=3^3$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ 예 $(5^2)^4=5^{2\times4}=5^8$

④ $(ab)^x=a^xb^x$ 예 $(7\times11)^2=7^2\times11^2$

출제 2023 수능 1번
2023 9월 모평 1번
2023 6월 모평 1번

★ 밑이 같은 식을 지수법칙으로 계산하는 문제가 1번으로 고정되어 나오고 있다. 쉽지만 방심하지 말고 정확히 풀어야 한다. 지수법칙은 기본적으로 밑이 같을 때의 곱셈과 나눗셈의 연산법칙이므로 밑이 같은지 확인하고 풀어야 한다. 지수로 된 과학적 공식들을 제시한 실생활 응용 문제도 난이도 있는 문제로 출제될 수 있는데 지수법칙을 정확히 적용할 수 있으면 풀 수 있다.

+개념 보충

4 $a^{\frac{m}{n}}$과 같이 지수가 유리수인 경우,
a가 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위한 조건은 m이 n의 배수 또는 n이 m의 약수일 때이다.

한걸음 더!

5 밑이 같을 때와 다를 때를 구분해!
간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다.
지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

A01 기본 2016실시(나) 4월/교육청 9(고3)

16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2 거듭제곱근의 성질

A02 기본 2003(인)/수능(홀) 1(고3)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? (2점)

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

A03 기본 2013(나) 9월/평가원 6(고3)

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

3 지수의 확장

A04 기본 2018실시(나) 10월/교육청 1(고3)

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? (2점)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

A05 기본 2013(나)/수능(홀) 26(고3)

$2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

A06 기본 2006(나) 6월/평가원 4(고3)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? (3점)

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

A07 기본 2009(나) 9월/평가원 20(고3)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

A08 기본 2005예비평가(나) 12월/평가원 26(고3)

어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$$I_d=I_0 2^{-0.25d}$$

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점)

① 16 m ② 12 m ③ 10 m
④ 8 m ⑤ 4 m

❖ 정답 및 해설 2~3p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

PATTERN PRACTICE

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

tip

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는

1 n이 짝수일 때에는 a의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

2 n이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

A09 2016실시(나) 11월/교육청 13(고2)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

A10 2022실시 7월 학평 19(고3)

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. (3점)

A11 2021(가) 6월/평가원 12(고3)

자연수 n이 $2\leq n\leq 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

A12 2020실시(가) 3월/교육청 18(고3)

다음은 $1\leq |m|<n\leq 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

(i) $m>0$인 경우
n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.

(ii) $m<0$인 경우
n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
(가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? (4점)

① 70　② 65　③ 60　④ 55　⑤ 50

A13

❀❀❀ 2014실시(A) 6월/교육청 7(고2)

자연수 $n(n\geq 2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2 거듭제곱근의 성질

유형 02 거듭제곱근의 계산

두 양수 a, b에 대하여 m, n이 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
③ $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

tip

거듭제곱근의 성질은 양수에서만 적용된다.

A14

❀❀❀ 2018실시(나) 3월/교육청 2(고3)

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}$의 값은? (2점)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

A15

❀❀❀ 2009(나) 6월/평가원 1(고3)

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4$의 값은? (2점)

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

A16

❀❀❀ 2001(인)/수능(홀) 1(고3)

$(\sqrt{2})^5$의 값은? (2점)

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

유형 03 거듭제곱근의 활용

빈출

(1) 거듭제곱근의 성질

두 양수 a, b에 대하여 m, n이 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
③ $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

(2) 거듭제곱근의 대소 관계

자연수 n에 대하여 $a>0$, $b>0$일 때,
$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$이면 $a<b$이다.

tip

1 실수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & (n\text{이 짝수})\\ a & (n\text{이 홀수})\end{cases}$를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

2 거듭제곱근의 대소 비교는 $\sqrt[n]{\ }$에서 n의 값을 통일시킨다.

A17

❀❀❀ 2020실시(나) 4월/교육청 18(고3)

1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? (4점)

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

A18

❀❀❀ 2018실시(나) 3월/교육청 14(고3)

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4점)

① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

❖ 정답 및 해설 3~6p

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 킬러 + 1등급 킬러]

D162 ✪ 2등급 킬러 2022실시 3월 학평 21(고3)

상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a, b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$) (4점)

D163 ✿✿✿ 2023대비 수능 21(고3)

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}|3^{x+2}-n| & (x<0)\\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

D164 ✿✿✿ 2015(A)/수능(홀) 30(고3)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) (4점)

(가) 점 A의 좌표는 $(-2, 3^n)$이다.
(나) 점 B의 좌표를 (a, b)라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b\leq\log_2 a$를 만족시킨다.
(다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

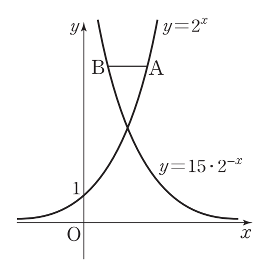
D165 ✪ 2등급 킬러 2015(A) 6월/평가원 30(고3)

양수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. (4점)

(가) $a\leq b\leq 20$
(나) $\log b-\log a\leq f(a)-f(b)$

D166 ✿✿✿ 2014(A) 6월/평가원 20(고3)

그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는? (4점)



① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

14 DAY

경찰대, 삼사 기출 문제 [2점, 3점, 4점, 5점]

D167
2019(가)/삼사 3(고3)

방정식 $2^x+\frac{16}{2^x}=10$의 모든 실근의 합은? (2점)

① 3 ② $\log_2 10$ ③ $\log_2 12$
④ $\log_2 14$ ⑤ 4

D168
2023대비 경찰대 3(고3)

직선 $x=a$와 세 함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=2^x$, $h(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.
$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=8:3$일 때, 상수 a의 값은? (3점)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

D169
2022/경찰대 21(고3)

방정식 $\log_2(x+4)+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=1$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. (3점)

D170
2021/경찰대 1(고3)

$\log_3(\log_{27}x)=\log_{27}(\log_3 x)$가 성립할 때, $(\log_3 x)^2$의 값은? (3점)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{27}$ ③ 3
④ 9 ⑤ 27

D171
2023대비 삼사 9(고3)

곡선 $y=|\log_2(-x)|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은? (4점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D172
2021(나)/삼사 24(고3)

부등식 $2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오. (3점)

고려대학교 관현악단

동아리 소개

고려대학교 관현악단 동아리

고려대학교 대표 아마추어 오케스트라!

고려대학교 관현악단은 1971년 창단된 고려대학교 최대 규모의 동아리로, 관악기와 현악기, 그리고 타악기로 이루어져 있어요. 입단 이후 악기를 고르고 시작하시는 학우들도 계실 만큼 실력은 전혀 상관없으며 학기 중 모든 활동의 참여는 자유입니다!

매년 3월과 9월에 신춘 음악회와 정기 연주회를 개최하고 있는데, 보통 다른 대학 아마추어 오케스트라는 연주회 횟수를 셀 때 3월과 9월의 연주회를 합산하여 '제○○회 정기 연주회'로 표기하지만, 고려대학교 관현악단은 신춘(3월)과 정기(9월)를 별도의 횟수로 세고 있어요.

이 연주회는 아마추어 오케스트라의 수준에서 높은 실력을 자랑해요.
1994년 9월 안드레아스 에카르트의 코리아 심포니를 세계 초연했고, 2005년에는 러시아 음악가 라린이 작곡한 고려대학교 개교 100주년 기념 교향곡인 〈자유·정의·진리를 위한 교향곡〉을 예술의 전당 콘서트홀에서 세계 초연했고, 해당 연주 실황 음원은 KBS 클래식 FM에서 방송되기도 했답니다.

음대가 없는 고려대학교의 특성상 학교로부터도 특별한 대접을 받고 있으며, 연주회 때에는 총장이 내빈으로 참석해요. 그동안 동아리 이름을 정하고자 수차례 협의를 했으나 그때마다 별도의 이름을 정하지 못했고, '고려대학교 관현악단'으로 남게 되었답니다.

악기를 배우고 싶었지만 기회가 없었던 분들, 대학에서 오케스트라 활동을 이어나가고 싶으신, 새내기 및 정든내기 여러분들 주목하세요. 단원을 상시 모집하고 있는 고려대학교 관현악단의 문을 두드리세요. 다양한 활동을 통해 음악을 즐기고 단원들과 친목을 다질 수 있을 거예요.

1회 수학 Ⅰ 실전 기출 모의고사

2024학년도 수능 대비 ①
범위: 수학 Ⅰ 전단원

- 문항 수 11개
- 배점 37점
- 제한시간 30분

5지선다형

1회 01
2010(나)/수능(홀) 1(고3)

$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1회 02
2016실시(가) 3월/교육청 5(고3)

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m=6$일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

1회 03
2016실시(가) 7월/교육청 6(고3)

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값은? (3점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

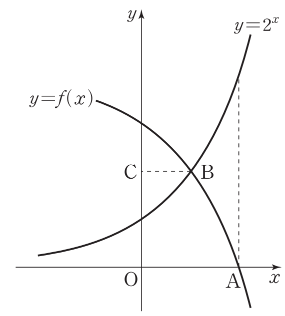
1회 04
2017실시(나) 4월/교육청 13(고3)

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위한 모든 정수 a의 값의 합은? (3점)

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

1회 05
2014예비평가(B) 5월/평가원 8(고3)

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. (단, $m>2$이다.)
곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은? (4점)



① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

1회 06
2014(A)/수능(홀) 16(고3)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고

$(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}\ (n\ge1)$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면
> $n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$
> 이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면
> $$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\boxed{(가)}$$
> 이다. $b_n=\frac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1=1$이고
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $$b_n=\boxed{(나)}$$
> 이므로
> $$\log a_n=n\times\boxed{(나)}$$
> 이다. 그러므로 $a_n=10^{n\times\boxed{(나)}}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$과 $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(4)}$의 값은? (4점)

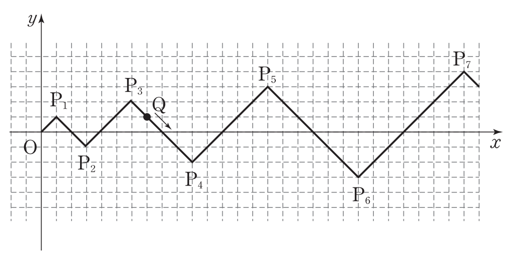
① 38 ② 40 ③ 42
④ 44 ⑤ 46

1회 07 ✽✽✽ 2014(A) 6월/평가원 16(고3)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) $x_1=y_1=1$
> (나) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+(n+1) \\ y_{n+1}=y_n+(-1)^n\times(n+1) \end{cases}$ $(n\geq1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}$을 따라 점 P_1에 도착한다. 자연수 n에 대하여 점 P_n에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1}을 향하여 $\overline{P_nP_{n+1}}$을 따라 이동한다. 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 $(7, 1)$이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y좌표는? (4점)



① -5　② -6　③ -7
④ -8　⑤ -9

단답형

1회 08 ✽✽✽ 2007실시(나) 3월/교육청 18(고3)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_7=12,\ \frac{a_6a_{10}}{a_5}=36$$

이 성립할 때, a_{15}의 값을 구하시오. (3점)

1회 09 ✽✽✽ 2015(A) 6월/평가원 24(고3)

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

의 최댓값을 각각 a, b라 하자. ab의 값을 구하시오. (3점)

1회 10 ✽✽✽ 2014(A) 6월/평가원 28(고3)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

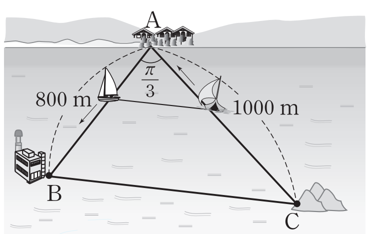
> (가) $a_{n+2}=a_n-4$ $(n=1, 2, 3, 4)$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이다.

$\sum_{k=1}^{50}a_k=258$일 때, a_2의 값을 구하시오. (4점)

1회 11 ✽✽✽

그림과 같이 갑이 탄 배는 항구 A에서 출발하여 800 m 떨어진 등대 B를 향해 속력 100 m/분으로 직선 경로를 따라서 항해하고, 을이 탄 배는 섬 C에서 출발하여 1000 m떨어진 항구 A를 향해 속력 200 m/분으로 직선 경로를 따라서 항해하고 있다.

$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$일 때, 항구 A와 섬 C를 각각 동시에 출발한 갑, 을이 탄 두 배가 지나는 지점을 잇는 선분이 B지점과 C지점을 잇는 선분과 평행이 되는 순간의 두 배 사이의 거리는 $\frac{q}{p}\sqrt{21}$이다. $q-p$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고, 두 배의 크기는 무시한다.) (4점)



33 DAY

❖ 정답 및 해설 544~547p

A 지수

기본 기출 문제

A 01 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 89%]

(**정답 공식:** 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}$, -27의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-27}$이다.)

❶16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, ❷-27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

단서 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ❶은 양수, ❷는 음수의 거듭제곱근이니까 주의하자.

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 실수 a, b의 값을 찾자.

$x^n=a$(a는 상수)라 할 때, x는 a의 n제곱근이야.

16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=16$이므로

$x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

주의 판별식을 이용하면 $D=0^2-4\times1\times4<0$으로 허근을 가져.

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

$x^2=-4$에서 $x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i$

실수가 아닌 허수이지?

$\therefore a=2$ 또는 $a=-2$

-27의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=-27$이므로

$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$

판별식을 이용하면 $D=3^2-4\times9<0$으로 허근이야.

$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore b=-3$

2nd $a-b$의 최댓값을 구해.

$a-b=2-(-3)=5$ 또는 $a-b=-2-(-3)=1$

이므로 $a-b$의 최댓값은 5이다.

두 수의 차의 최대는 a가 양수, b가 음수일 때야.

A 02 정답 ① *거듭제곱근의 계산 [정답률 91%]

(**정답 공식:** $\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? (2점)

단서 $16=2^4$이니까 2의 거듭제곱근으로 정리해 볼까?

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산해.

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$

밑이 2인 수로 정리해 볼까? $\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$

$=\sqrt[3]{2\times2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

[다른 풀이]

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $a^m\times a^n=a^{m+n}$

$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2$

A 03 정답 ② *거듭제곱근의 계산 [정답률 71%]

(**정답 공식:** 괄호 안의 제일 안쪽 근호부터 정리하여 밑을 2로 바꾼다.)

단서 $\sqrt{\sqrt{\ }}$ 꼴은 근호를 줄여나가야 해. 이때, 이 수보다 큰 자연수를 찾자.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1st 거듭제곱근을 지수로 바꿔 간단히 정리하여 값을 구해.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\left(2\times\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2\times2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

$=\{(2\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}}\}^3$ $(a^x)^y=a^{xy}$

실수 $a^x\times a^y=a^{x+y}$과 $(a^x)^y=a^{xy}$를 잘 구별하자.

이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

6, 7, 8, ⋯

[다른 풀이]

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=2^{\frac{5}{2}}$이므로 자연수 n에 대하여 $n>2^{\frac{5}{2}}$이라 하면 $n^2>2^5$

$\therefore n=6,\ 7,\ \cdots$

따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

A 04 정답 ⑤ *지수법칙 – 밑이 같은 계산 [정답률 98%]

(**정답 공식:** 밑이 같을 때 곱한 값은 지수끼리 더한 값과 같다.)

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? (2점)

단서 밑이 같은 경우의 곱의 계산을 묻는 거야.

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

1st 지수법칙을 이용하여 계산해.

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^2=4$

$a^ma^n=a^{m+n}$을 이용한 거야.

지수법칙 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고, x, y가 실수일 때

① $a^x\times a^y=a^{x+y}$
② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$
④ $(ab)^x=a^xb^x$
⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

A 05 정답 16 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 67%]

(**정답 공식:** 어떤 자연수의 n제곱근이라는 것은 n제곱했을 때 자연수가 되어야 한다는 의미이다.)

단서 어떤 자연수를 N이라 하면 $\sqrt[n]{N}$ 이지? 이때, n은 자연수이고 $2\le n\le100$이야.

$2\le n\le100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

1st 어떤 자연수를 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$으로 나타내.

어떤 자연수를 N이라 하면 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수 N의 n제곱근이므로

x가 a의 n제곱근이면 $x^n=a$이야.

$\left\{\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=\left\{\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=3^{\frac{5n}{6}}=N$

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

실수 복잡한 거듭제곱근을 지수 형태로 고치는 과정에서 실수가 많아.

2nd N, n이 자연수이니까 $2\le n\le 100$에서 n의 개수를 구해.

n이 6의 배수이면 N은 3의 거듭제곱으로 자연수가 된다.

$n=6k$ (k는 자연수)라 하면 $\frac{5}{6}n=\frac{5}{6}\times 6k=5k$도 자연수야.

즉, n의 개수는 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수와 같다.

따라서 자연수 n의 개수는 16이다. $\frac{100}{6}=16.\times\times$

수능 핵강

1부터 n까지의 자연수 중 2, 3, 4, …의 배수의 개수를 쉽게 구하는 방법은 몫을 구하는 거야.

2의 배수 : $\frac{n}{2}$의 몫　　3의 배수 : $\frac{n}{3}$의 몫

4의 배수 : $\frac{n}{4}$의 몫　　5의 배수 : $\frac{n}{5}$의 몫

m의 배수 : $\frac{n}{m}$의 몫

A 06 정답 ① *지수법칙의 활용 – 문자로 표현 [정답률 85%]

(정답 공식: $\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}$)

❶ $a=\sqrt{2}$, ❷ $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? (3점)

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$　② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$　③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$　⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

단서 6의 6제곱근이니까 ❶, ❷를 이용하기 위하여 2와 3의 거듭제곱으로 표현해.

1st 지수법칙을 이용하여 $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타내.

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

주의 $(ab)^n=a^n\times b^n$

[다른 풀이]

$\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{2\times 3}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{3}$ $\Rightarrow \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\times\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ $\Rightarrow \sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$=\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{2}}$

A 07 정답 25 *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 73%]

(정답 공식: $3^{a^2-b^2}=(3^{a+b})^{a-b}$)

두 실수 a, b가 ❶ $3^{a+b}=4$, ❷ $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

단서 지수에 a^2-b^2이 나오게 하려면 ❶과 ❷를 이용해서 거듭제곱을 해야 되겠지? 실수로 식 ❶, ❷를 곱하면 안 돼!

1st 주어진 조건 중 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하자.

$3^{a^2-b^2}=3^{(a+b)(a-b)}=(3^{a+b})^{a-b}=4^{a-b}=(2^2)^{a-b}=(2^{a-b})^2=5^2=25$

$a^{nm}=(a^n)^m$

[다른 풀이]

$3^{a+b}=4$에서 $a+b=\log_3 4$ … ㉠

$2^{a-b}=5$에서 $a-b=\log_2 5$ … ㉡

[로그의 정의] $a^x=N$에 대하여 $(a>0, a\ne 1)$ $x=\log_a N$

㉠, ㉡의 각 변을 각각 곱하면

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_3 4\times\log_2 5$

$=\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=\frac{2\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=2\times\frac{\log 5}{\log 3}$

$=2\log_3 5$ $\left(\because \frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b\right)$

$=\log_3 5^2=\log_3 25$

따라서 $a^2-b^2=\log_3 25$이므로 $3^{a^2-b^2}=3^{\log_3 25}=25$ ($\because a^{\log_a b}=b$)

A 08 정답 ④ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 63%]

(정답 공식: $I_d=0.25I_0$일 때, d의 값을 구한다.)

어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$I_d=I_0 2^{-0.25d}$ … ⓐ

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점)

단서 I_d와 I_0의 관계식이 하나 더 있으니까 ⓐ와 연립하여 d의 값을 구해.

① 16 m　② 12 m　③ 10 m　④ 8 m　⑤ 4 m

1st 단서에서 주어진 조건에 맞게 I_d, I_0의 식을 세워.

수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %이므로

I_d　I_0

$I_d=0.25I_0$ … ㉠

그런데 주어진 조건에 의하여 $I_d=I_0 2^{-0.25d}$ … ㉡

㉠=㉡에 의하여 $0.25I_0=I_0 2^{-0.25d}$　$\therefore 2^{-0.25d}=0.25$

2nd 우변의 값을 지수 형태로 변형해.

$0.25=\frac{1}{4}=2^{-2}$이므로 $2^{-0.25d}=2^{-2}$

$a>0$, $a\ne 1$인 실수 a에 대하여 $a^x=a^y$이면 $x=y$야.

$-0.25d=-2$　$\therefore d=\frac{2}{0.25}=8$

따라서 구하는 수심은 8 m이다.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 09 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 81%]

(정답 공식: a의 n제곱근은 $\sqrt[n]{a}$이다.)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

단서 거듭제곱근의 정의를 알고 있는지 물어보고 있어.

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

1st a, b를 거듭제곱근을 이용하여 표현해 봐.

a는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$

$\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로 $(\sqrt{2})^4=b$

2nd 1st에서 구한 값을 $\left(\frac{b}{a}\right)^3$에 대입하자.

$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{\{(\sqrt{2})^4\}^3}{2}=\frac{2^6}{2}=2^5=32$

A 10 정답 4 *거듭제곱근의 정의 [정답률 66%]

(정답 공식: 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 홀수이면 1개이고, n이 짝수이면 $a>0$일 때 2개, $a=0$일 때 1개, $a<0$일 때 0개이다.)

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. (3점)

단서 n이 홀수일 때와 n이 짝수일 때로 나누어 생각하면 돼. 또한 n이 짝수일 때에는 $2n^2-9n$의 부호가 양수인지 음수인지, 그 값이 0인지로 나누어 생각해야겠지?

1st n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 $f(n)$의 값을 구해.

(i) n이 $n\ge 2$인 홀수일 때,

$2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$이다. 이때의 실수 $2n^2-9n$의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{2n^2-9n}$의 1개야.

(ii) n이 $n\ge 2$인 짝수일 때,

i) $2n^2-9n>0$에서 $n>\frac{9}{2}$, 즉 n이 6 이상인 짝수이면 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이므로 $f(n)=2$이다.

n은 양수이므로 $2n^2-9n>0$의 양변을 n으로 나누면 $2n-9>0$ $\therefore n>\frac{9}{2}$

이때의 실수 $2n^2-9n$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{2n^2-9n}$, $-\sqrt[n]{2n^2-9n}$의 2개야.

ii) $2n^2-9n=0$을 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다. $2n^2-9n=n(2n-9)=0$에서 $n=0$ 또는 $n=\frac{9}{2}$ 그런데 $n\ge 2$인 자연수이므로 이 방정식을 만족시키는 n의 값은 없어.

iii) $2n^2-9<0$에서 $n<\frac{9}{2}$, 즉 n이 4 이하인 짝수이면 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(n)=0$이다.

2nd $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구해.

(i)에 의하여 $n=3$, $n=5$일 때 $f(n)=1$이고

(ii)에 의하여 $n=4$일 때 $f(n)=0$, $n=6$일 때 $f(n)=2$이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

쉬운 풀이

(i) $n=3$일 때

$2n^2-9n=2\times 3^2-9\times 3=18-27=-9<0$의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{-9}$로 1개야. $\therefore f(3)=1$

(ii) $n=4$일 때

$2n^2-9n=2\times 4^2-9\times 4=32-36=-4<0$의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없어. $\therefore f(4)=0$

(iii) $n=5$일 때

$2n^2-9n=2\times 5^2-9\times 5=50-45=5>0$의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[5]{5}$로 1개야. $\therefore f(5)=1$

(iv) $n=6$일 때

$2n^2-9n=2\times 6^2-9\times 6=72-54=18>0$의 여섯제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[6]{18}$, $-\sqrt[6]{18}$로 2개야. $\therefore f(6)=2$

(i)~(iv)에 의하여 $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

실수 a의 실수인 n제곱근 개념·공식

n이 2 이상인 자연수일 때,

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

A 11 정답 ① *거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수일 때 a가 음수이어야 하고 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 한다.

자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

단서 x에 대한 방정식 $x^n=-n^2+9n-18$을 만족시키는 음의 실근이 존재하는 경우를 찾는 것과 같아.

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

1st $-n^2+9n-18$의 값의 부호에 따라 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 a가 양수이고 n이 짝수이거나 a가 음수이고 n이 홀수이어야 해.

(i) $-n^2+9n-18>0$일 때, n이 짝수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.

이때, $-n^2+9n-18>0$에서 $n^2-9n+18<0$

$(n-3)(n-6)<0$ $\therefore 3<n<6$ $\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

이때, $2\le n\le 11$이므로 $3<n<6$

따라서 이것을 만족시키고 자연수 n이 짝수이어야 하므로 $n=4$

(ii) $-n^2+9n-18<0$일 때, n이 홀수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.

이때, $-n^2+9n-18<0$에서 $n^2-9n+18>0$

$(n-3)(n-6)>0$ $\therefore n<3$ 또는 $n>6$ $\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

이때, $2\le n\le 11$이므로 $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$

이것을 만족시키는 자연수 중 n이 홀수이어야 하므로

$n=7$ 또는 $n=9$ 또는 $n=11$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

A 12 정답 ② *거듭제곱근의 정의 [정답률 75%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 존재하고, n이 홀수일 때 a가 실수이면 존재한다.

다음은 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

단서 실수의 홀수제곱근 중 실수는 1개이고 양수의 짝수제곱근 중 실수는 2개야.

> (i) $m>0$인 경우
>
> n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가)이다.
>
> (ii) $m<0$인 경우
>
> n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나)이다.
>
> (i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가)+(나)이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? (4점)

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

1st $m>0$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구해.

(i) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다.

따라서 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 부등식 $1\le m<n\le 10$을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수와 같다.

즉, 1에서 10까지의 자연수 중 서로 다른 2개의 숫자를 뽑아 그 중 작은 수가 m, 큰 수가 n으로 결정되는 것과 같다.

따라서 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=\underset{(가)}{45}$ 이다. 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개 중에서 r개를 택하는 조합이라 하고 이때의 조합의 수는 ${}_nC_r$로 나타내.

A 89 정답 ③ *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 65%]

(정답 공식: $a^x=7$이면 $a=7^{\frac{1}{x}}$으로 나타낼 수 있다.)

세 양수 a, b, c가 $a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$, $abc=49$를 만족할 때, $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}$의 값은? (3점)

단서 거듭제곱근의 정의에 의하여 a, b, c를 밑이 7인 수로 표현해 볼까?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

1st 거듭제곱근의 정의에 의하여 a, b, c를 밑이 7인 수로 나타내어 7의 지수를 각각 $\frac{6}{x}$, $\frac{3}{y}$, $\frac{2}{z}$로 표현해.

실수 $x^n=a$에서 x는 a의 n제곱근이야. 즉, 이 방정식의 해는 $x=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

$a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$에서

$a^x=7 \Rightarrow a=7^{\frac{1}{x}} \Rightarrow a^6=7^{\frac{6}{x}}$

7의 x제곱근이 $a \Rightarrow a=\sqrt[x]{7}$

$b^{2y}=7 \Rightarrow b=7^{\frac{1}{2y}} \Rightarrow b^6=7^{\frac{3}{y}}$

7의 $2y$제곱근이 $b \Rightarrow b=\sqrt[2y]{7}$

$c^{3z}=7 \Rightarrow c=7^{\frac{1}{3z}} \Rightarrow c^6=7^{\frac{2}{z}}$

7의 $3z$제곱근이 $c \Rightarrow c=\sqrt[3z]{7}$

2nd $abc=49$를 이용하여 $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}$의 값을 구해.

즉, $a^6b^6c^6=7^{\frac{6}{x}}\times 7^{\frac{3}{y}}\times 7^{\frac{2}{z}}=7^{\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}}$이고 $abc=49$이므로

밑이 같으니까 $a^m\times a^n=a^{m+n}$

$(abc)^6=49^6=(7^2)^6=7^{12}=7^{\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}}$

$\therefore \frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

[다른 풀이]

로그를 이용해서 풀어도 돼.

$a^x=7 \Rightarrow x=\log_a 7 \Rightarrow \frac{1}{x}=\log_7 a$

$\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$

$b^{2y}=7 \Rightarrow 2y=\log_b 7 \Rightarrow \frac{1}{2y}=\log_7 b$

$c^{3z}=7 \Rightarrow 3z=\log_c 7 \Rightarrow \frac{1}{3z}=\log_7 c$

$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)=6(\log_7 a+\log_7 b+\log_7 c)$

$=6(\log_7 abc)$

$=6\log_7 49=12$

$\therefore \frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

톡톡 풀이

$a^{6xyz}=7^{6yz}$, $b^{6xyz}=7^{3xz}$, $c^{6xyz}=7^{2xy}$에서 $(abc)^{6xyz}=7^{6yz+3xz+2xy}$이므로

$abc=49$를 위의 식에 대입하면

$49^{6xyz}=7^{6yz+3xz+2xy}$, $7^{12xyz}=7^{6yz+3xz+2xy}$

$\therefore 12xyz=6yz+3xz+2xy$

양변을 xyz로 나누면

$\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

지수법칙 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고, x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

A 90 정답 ① *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 67%]

(정답 공식: $3=6^{\frac{1}{a}}$, $12=6^{\frac{1}{b}}$)

실수 a, b에 대하여 $3^a=12^b=6$이 성립할 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 값은? (3점)

단서 6의 a제곱근이 3, 6의 b제곱근이 12로 같으니까 3, 12를 6으로 나타내 볼까?

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

1st 단서를 이용하여 3, 12를 6으로 표현해 볼까?

$a^x=b \Rightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하자.

$3^a=6$에서 $3=6^{\frac{1}{a}}$이고 $12^b=6$에서 $12=6^{\frac{1}{b}}$이다.

6의 a제곱근이 3이니까 $3=\sqrt[a]{6}$ 6의 b제곱근이 12이니까 $12=\sqrt[b]{6}$

2nd $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 값을 구해.

이때, $6^{\frac{1}{a}}\times 6^{\frac{1}{b}}=3\times 12$에서 $6^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=36=6^2$이므로

밑이 같으니까 $a^m=a^n$이면 $m=n$이야.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$

A 91 정답 ② *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 49%]

(정답 공식: $80=2^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{10}=2^{\frac{2}{y}}$, $a=2^{\frac{3}{z}}$이므로 지수법칙을 이용하여 식을 변형해 보자.)

$80^x=2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^y=4$, $a^z=8$을 만족시키는 세 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 32 ② 64 ③ 96 ④ 128 ⑤ 160

단서 세 등식의 우변이 2의 거듭제곱으로 표현되지? 즉, 80, $\frac{1}{10}$, a를 밑이 2인 수로 표현하여 정리해 보자.

1st 주어진 세 등식에서 2를 밑으로 하는 수로 만들자.

$80^x=2 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}=80 \cdots$ ㉠

2의 x거듭제곱근이 80이니까.

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=4=2^2 \Rightarrow 2^{\frac{2}{y}}=\frac{1}{10} \cdots$ ㉡

4의 y거듭제곱근이 $\frac{1}{10}$이니까.

$a^z=8=2^3 \Rightarrow 2^{\frac{3}{z}}=a \cdots$ ㉢

8의 z거듭제곱근이 a이니까.

2nd 2의 지수의 합을 조건과 같게 변형하여 양수 a의 값을 구해.

조건에서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이므로

㉠×㉡÷㉢을 하면 $2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=2$, $\frac{8}{\sqrt[3]{a}}=2$ $\therefore \sqrt[3]{a}=4$

밑이 같을 때 곱하기와 나누기는 지수의 더하기와 빼기야.

따라서 양변을 세제곱하면 $a=4^3=64$

[다른 풀이]

지수의 미지수를 이용하기 위하여 등식의 양변에 알맞은 로그를 취하자.

$\frac{1}{x}=\log_2 80$, $\frac{1}{y}=\log_4 \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{y}=\log_2\frac{1}{10}$,

$\log_{2^2}■=\frac{1}{2}\log_2■$

$\frac{1}{z}=\log_8 a=\log_2\sqrt[3]{a}$

$\log_{2^3}■=\frac{1}{3}\log_2■=\log_2■^{\frac{1}{3}}$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=\log_2\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=1$이므로 $\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=2$

$\log_2■=▲ \Rightarrow ■=2^▲$

(이하 동일)

A 92 정답 ⑤ *지수법칙의 활용 – 특수한 꼴 ········ [정답률 66%]

(정답 공식: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$이고, $a^m\times a^n=a^{m+n}$이다.)

두 실수 a, b에 대하여

❶ $a+b=2$, $2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=3$

❷ 일 때, 2^a+2^b의 값은? (3점)

단서 ❶의 양변을 제곱하면 곱셈 공식에 의하여 ❷의 꼴이 나오지?

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

1st $2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=3$의 양변을 제곱하여 2^a+2^b 꼴로 나타내.

$2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=3$의 양변을 제곱하면 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\left(2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}\right)^2=9$에서 $2^a-2\times2^{\frac{a}{2}}\times2^{\frac{b}{2}}+2^b=9$이므로

$2^a-2^{\frac{a+b}{2}+1}+2^b=9$

$a^ma^n=a^{m+n}$

이때, $a+b=2$이므로 $2^a-2^2+2^b=9$

∴ $2^a+2^b=9+4=13$

A 93 정답 98 *지수법칙의 활용 – 특수한 꼴 ········ [정답률 83%]

(정답 공식: 양변을 제곱해 본다.)

❶ $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$을 만족시키는 양수 a에 대하여 ❷ $a+a^{-1}$의 값을 구하시오. (3점) 단서 ❶의 양변을 제곱하면 곱셈 공식에 의하여 ❷의 꼴이 나오지?

1st 지수법칙과 곱셈 공식을 이용하자.

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$의 양변을 제곱하면

$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=100$ $a^{\frac{1}{2}}=t$라 하면 조건은 $t+t^{-1}=10$이고 구해야 하는 것은 t^2+t^{-2}이니까 곱셈 공식으로 구할 수 있지.

$a+2+a^{-1}=100$ ∴ $a+a^{-1}=98$

[다른 풀이]

곱셈 공식의 변형에 의하여 $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$이므로

$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=100-2=98$

A 94 정답 ④ *지수법칙의 활용 – 특수한 꼴 ········ [정답률 75%]

(정답 공식: 양변을 제곱해 본다.)

$3^x+3^{1-x}=10$일 때, 9^x+9^{1-x}의 값은? (3점)

단서 밑을 3으로 만들어 조건을 이용하도록 변형해 볼까?

① 91 ② 92 ③ 93

④ 94 ⑤ 95

1st 3^x+3^{1-x}과 9^x+9^{1-x}의 관계를 알자.

3^x+3^{1-x}을 제곱하면 $9^x+9^{1-x}=3^{2x}+3^{2-2x}=(3^x)^2+(3^{1-x})^2$이니까.

$(3^x+3^{1-x})^2=(3^x)^2+2\times3^x\times3^{1-x}+(3^{1-x})^2=9^x+6+9^{1-x}$ ⋯ ㉠

$(a^x)^y=(a^y)^x=a^{xy}$

2nd 주어진 조건을 이용하여 9^x+9^{1-x}의 값을 구해.

주의 지수법칙에 의해 $3^{1-x}=3^1\times3^{-x}$야.

$3^x+3^{1-x}=10$이므로 ㉠에 대입하면

$10^2=9^x+6+9^{1-x}$ ∴ $9^x+9^{1-x}=10^2-6=94$

[다른 풀이]

$3^x=t\,(t>0)$라 하면

$3^{1-x}=\frac{3}{3^x}=\frac{3}{t}$ ∴ $3^x+3^{1-x}=t+\frac{3}{t}=10$ ⋯ ㉡

$=3^1\times3^{-x}$

그런데 $9^x=3^{2x}=t^2$, $9^{1-x}=\frac{9}{9^x}=\frac{9}{t^2}$이므로

$9^x+9^{1-x}=t^2+\frac{9}{t^2}=\left(t+\frac{3}{t}\right)^2-2\times t\times\frac{3}{t}=10^2-6=94$ (∵ ㉡)

A 95 정답 17 *지수법칙의 활용 – 특수한 꼴 ········ [정답률 75%]

(정답 공식: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$)

두 실수 a, b에 대하여 단서 $2^{-a}+2^{-b}$을 $2^a+2^b=2$를 이용하도록 변형해볼까?

$2^a+2^b=2$, $2^{-a}+2^{-b}=\frac{9}{4}$

일 때, 2^{a+b}의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (3점)

1st 주어진 식을 간단히 고치고 두 식을 연립해.

$2^{-a}+2^{-b}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}=\frac{2^a+2^b}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$ ⋯ ㉠

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

주의 $2^{a+b}=2^a\times2^b$이야. 2^a+2^b과 혼동하지 않도록 주의해야 해.

그런데 $2^a+2^b=2$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$ ∴ $2^{a+b}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로 $p+q=17$

A 96 정답 ② *지수법칙의 활용 – 특수한 꼴 ········ [정답률 73%]

(정답 공식: $(a^m+a^{-m})^2=a^{2m}+a^{-2m}+2$)

실수 a가 ❶ $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, ❷ 4^a+4^{-a}의 값은? (3점)

단서 ❶의 양변을 제곱하면 곱셈 공식에 의하여 ❷의 꼴이 나오지?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

1st 주어진 식의 양변을 제곱하여 4^a+4^{-a} 꼴로 나타내.

주어진 식에서 $2^a+2^{-a}=-2(2^a-2^{-a})$

양변을 제곱하면 $4^a+4^{-a}+2=4(4^a+4^{-a}-2)$이므로

$3(4^a+4^{-a})=10$ $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$

∴ $4^a+4^{-a}=\frac{10}{3}$

[다른 풀이]

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분모, 분자에 2^a을 곱하면

$\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$, $2^{2a}+1=-2\times2^{2a}+2$, $2^{2a}=\frac{1}{3}$

이항하면 $3\times2^{2a}=1$

따라서 $4^a=\frac{1}{3}$, $4^{-a}=3$이므로

역수를 취해.

$4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

로그의 밑의 변환 공식 개념·공식

$a\neq1$, $a>0$, $b\neq1$, $b>0$, $c\neq1$, $c>0$일 때,

① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

B 69 정답 ① *로그의 성질의 활용-식의 정리 [정답률 63%]

(**정답 공식**: 로그의 정의를 이용하여 n을 2의 거듭제곱 꼴로 바꾼다.)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? (4점) 단서 n과 $5\log_n 2$의 값이 자연수인 경우에 대해서만 생각해야 해.

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

1st n에 대한 식으로 표현해봐.

$5\log_n 2=k$ (단, k는 자연수)라고 하자.

$\log_n 2=\dfrac{k}{5}$

$n^{\frac{k}{5}}=2$ ($\because$ $\log_a x=N \Longleftrightarrow x=a^N$)

$\therefore$ $n=2^{\frac{5}{k}}$ → 지수와 로그의 성질을 이용하여 n에 대한 식으로 정리한 거야.

2nd n이 자연수인 경우를 따져봐.

n이 2 이상의 자연수이므로

$2^{\frac{5}{k}}\geq2$, $\dfrac{5}{k}\geq1$

$\therefore$ $k\leq5$

이때 $2^{\frac{5}{k}}$이 자연수이므로 $k=1$ 또는 $k=5$

즉, $n=2$ 또는 $n=2^5$ $k=2, 3, 4$인 경우 $2^{\frac{5}{k}}$의 값은 자연수가 아니야.

따라서 모든 n의 값의 합은

$2+2^5=34$

B 70 정답 ③ *로그의 성질의 활용-식의 정리 [정답률 69%]

(**정답 공식**: a와 b의 관계식을 구하고, 로그의 성질을 이용한다.)

1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$\log_{\sqrt{3}} a=\log_9 ab$ 단서 로그의 성질을 이용하여 밑을 같게 만들고 진수끼리 같다는 식을 세우면 돼.

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? (4점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 로그의 밑을 9로 통일해서 a, b에 대한 관계식을 구해보자.

$\log_{\sqrt{3}} a=2\log_3 a=4\log_9 a=\log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4=\log_9 ab$ $2\log_3 a=2\log_{3^2} a^2=4\log_9 a=\log_9 a^4$

$a^4=ab$

$a(a^3-b)=0$ 함정 로그 $\log_a N$의 밑 조건은 $a\neq1$, $a>0$이어야 해.

a는 1보다 큰 실수이므로 양변을 a로 나누면

$b=a^3$ ⋯ ㉠

2nd $b=a^3$을 이용해서 $\log_a b$의 값을 구해.

㉠을 $\log_a b$에 대입하면

$\log_a b=\log_a a^3=3$

$\log_x y^n=n\log_x y$

B 71 정답 16 *로그의 성질의 활용-식의 정리 [정답률 71%]

(**정답 공식**: $\dfrac{\log_a b}{2a}$, $\dfrac{18\log_b a}{b}$를 곱하면 log가 소거된다.)

1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여

$\dfrac{\log_a b}{2a}=\dfrac{18\log_b a}{b}=\dfrac{3}{4}$ 단서 로그의 성질을 이용하여 $\log_a b$와 $\log_b a$를 정리하고, a, b의 식으로 나타내 봐.

이 성립할 때, ab의 값을 구하시오. (3점)

1st 등식을 두 부분으로 나누어 관계식을 구해.

$\dfrac{\log_a b}{2a}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{18\log_b a}{b}=\dfrac{3}{4}$

양변을 각각 곱하면 $\dfrac{\log_a b}{2a}\times\dfrac{18\log_b a}{b}=\dfrac{9}{16}$

2nd 로그의 성질을 이용하여 ab의 값을 구해.

$\log_a b\times\log_b a=1$이므로 $\dfrac{9}{ab}=\dfrac{9}{16}$

$\therefore$ $ab=16$ → [밑의 변환 공식의 활용]

[다른 풀이] $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c$에서 $c=a$를 대입하면 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$이 성립해.

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$이므로 $\dfrac{\log_a b}{2a}=\dfrac{18\log_b a}{b}$에서

$\dfrac{\log_a b}{2a}=\dfrac{18}{b\log_a b}$ $\therefore$ $(\log_a b)^2=\dfrac{36a}{b}$ ⋯ ㉠

a, b, $\log_a b$를 각각 구하려고 하지 말고, $\log_a b$를 소거하여 ab의 값을 바로 구해야 해.

$\dfrac{\log_a b}{2a}=\dfrac{3}{4}$에서 $\log_a b=\dfrac{3}{2}a$

㉠에 대입하면 $\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2=\dfrac{36a}{b}$ $\therefore$ $ab=16$

B 72 정답 21 *로그의 성질의 활용-식의 정리 [정답률 71%]

(**정답 공식**: $\log_c a:\log_c b=\log a:\log b$, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.)

1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여

❶ $\log_c a:\log_c b=2:3$일 때, 단서 $\log_c a$, $\log_c b$(❶)를 가지고 $\log_a b$, $\log_b a$(❷)의 식의 값을 구하기 위해서 밑의 변환 공식을 사용해.

❷ $10\log_a b+9\log_b a$의 값을 구하시오. (3점)

1st $\log_c a$, $\log_c b$에 대한 비례식으로 그 값을 임의로 정해 볼까?

$\log_c a:\log_c b=2:3$이므로 → $x:y=★:◆$이라 하면 $x=★t$, $y=◆t$라 하고 식에 대입할 수 있어.

$\log_c a=2k$, $\log_c b=3k$ (단, k는 0이 아닌 실수)라 하자.

2nd 밑의 변환 공식을 이용하여 $\log_a b$, $\log_b a$의 값을 찾아 $10\log_a b+9\log_b a$의 값을 구해.

함정 값의 비로 나타낸 로그함수 값을 0이 아닌 실수 k를 이용하여 나타낼 수 있어야 해.

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\dfrac{3k}{2k}=\dfrac{3}{2}$

→ [밑의 변환 공식] $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ $10\log_a b+9\log_b a=10\times\dfrac{3}{2}+9\times\dfrac{2}{3}=21$

[다른 풀이]

$\log_c a:\log_c b=2:3$이므로 $3\log_c a=2\log_c b$, $\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\dfrac{3}{2}$

$a:b=c:d$이면 $ad=bc$

$\therefore$ $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\dfrac{3}{2}$

(이하 동일)

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 킬러 + 1등급 킬러]

B 128 정답 426 ＊로그의 성질의 활용-식의 정리 … [정답률 33%]

(정답 공식: $\log_a x=b$이면 $x=a^b$이다.)

자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록

단서 정수 k에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$라 놓고 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

1st 주어진 값이 정수가 되도록 하는 자연수 n을 식으로 나타내.

정수 k에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$라 하면

$\underbrace{4\log_{2^6}\left(\frac{3}{4n+16}\right)}_{\log_{a^n}k=\frac{1}{n}\log_a k}=k$, $\frac{4}{6}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$, $\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{3}{2}k$ ($\log_a x=t \Leftrightarrow x=a^t$)

$\therefore \frac{3}{4n+16}=2^{\frac{3}{2}k}=\underbrace{(2^3)^{\frac{k}{2}}}_{a^{mn}=(a^m)^n}=8^{\frac{k}{2}}$ … ㉠

이때, 자연수 n에 대하여 $0<\frac{3}{4n+16}<1$이므로 $0<8^{\frac{k}{2}}<1$이어야 한다.

n이 자연수이므로 $4n+16>20$이야.

즉, $k<0$이어야 한다.

또, $\frac{3}{4n+16}$이 유리수이므로 $8^{\frac{k}{2}}$도 유리수가 되어야 한다.

따라서 자연수 m에 대하여 $k=-2m$이라 하면 ㉠에서

자연수 m에 대하여 $k=-(2m-1)=-2m+1$이라 하면 $8^{\frac{k}{2}}=8^{\frac{-2m+1}{2}}=8^{-m}\times8^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{8}}{8^m}$이므로 무리수가 돼. 따라서 $k=-2m$이어야 해.

$\frac{3}{4n+16}=8^{-m}$, $\frac{4n+16}{3}=8^m$

$\therefore 4n+16=3\times8^m$

2nd 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구해.

(ⅰ) $m=1$일 때

$4n+16=3\times8=24$에서 $4n=8$

$\therefore n=2$

(ⅱ) $m=2$일 때

$4n+16=3\times8^2=192$에서 $4n=176$

$\therefore n=44$

(ⅲ) $m=3$일 때

$4n+16=3\times8^3=1536$에서 $4n=1520$

$\therefore n=380$

(ⅳ) $m\geq4$일 때 n의 값은 1000보다 크다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$이다.

로그의 성질 개념·공식

$a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$일 때,

① $\log_a a=1$ ② $\log_a 1=0$

③ $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ ④ $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$

B 129 정답 44 ✪ 1등급 킬러 [정답률 12%]

양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a와 n에 대하여 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

단서 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같으므로 두 수의 차는 정수가 되겠지? 나머지를 찾아야 해.

(가) $f(a)=f(a^{2n})$

(나) $(n+1)\log a=3n^2-4n+4$

✪ 이 문제는 두 로그의 소수 부분이 같도록 하는 자연수 n의 값을 구하는 것이다. 이를 위해서는 두 수의 소수 부분이 같으면 두 수의 차 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수가 되므로 이를 n에 대하여 나타내어 따져보는 것이 이 문제의 키포인트이다.

[풀이 단서 체크]

❶ 먼저, 조건 (가)에서 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같으므로 두 수의 차의 소수 부분은 0이다.
따라서 두 수의 차는 두 수의 정수 부분의 차와 같으므로 정수가 된다. ⇒ 단서

❷ 이제, 조건 (나)에서 주어진 식을 $\log a=\boxed{}$로 정리하여 $\log a$의 정수 부분과 소수 부분을 구분한다.

❸ 마지막으로, 로그의 성질에 의해 $\log a^{2n}=2n\log a$이므로 $\log a^{2n}-\log a$를 $\log a$로 묶어 나타내어 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

주의 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분을 각각 구해 비교하기보다는 두 수의 차가 정수가 됨을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

(핵심 정답 공식: 소수 부분이 같다는 것은 로그 값을 서로 뺀 값이 정수라는 뜻이다.)

[문제 풀이 순서]

＊두 상용로그의 소수 부분이 같도록 하는 자연수 n의 값 구하기

1st 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 그 차가 정수가 됨을 이용해서 식을 세우자.

조건 (나)에서 $(n+1)\log a=3n^2-4n+4$이므로 양변을 $n+1$로 나누면

$\log a=3n-7+\frac{11}{n+1}$ … ㉠

$\frac{3n^2-4n+4}{n+1}=\frac{(3n-7)(n+1)+11}{n+1}=3n-7+\frac{11}{n+1}$

실수 정말 자주 쓰이는 성질이니까 잘 익혀둬.

조건 (가)에서 $f(a)=f(a^{2n})$

즉, $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같으므로 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수여야 한다.

$\log a=m+\alpha$, $\log a^{2n}=m'+\alpha$ (m, m'은 정수, $0\leq\alpha<1$)이면 $\log a^{2n}-\log a=(m'+\alpha)-(m+\alpha)=(m'-m)=$(정수)

$2n\log a-\log a=(2n-1)\log a=$(정수)이므로

㉠의 양변에 $(2n-1)$을 곱하면

$(2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+\frac{11(2n-1)}{n+1}$

$=\underbrace{(2n-1)(3n-7)+22}_{\text{정수}}-\frac{33}{n+1}$

2nd 조건에 맞는 자연수 n의 값을 구하자.

$\frac{33}{n+1}$이 정수이면 $(2n-1)\log a$가 정수이다. n은 자연수이므로 $n+1$은 3, 11, 33이어야 한다. 즉, n은 2, 10, 32이다.

$\frac{33}{n+1}$이 정수가 되려면 $n+1$은 33의 약수이어야 하는데 n이 자연수이니까 $n+1$로 가능한 수는 3, 11, 33 이야.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+10+32=44$

[1등급 심화 특강]

〈소수 부분이 같은 두 수의 차가 정수인 이유〉

$\log a^{2n}$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 m, α $(0\le\alpha<1)$, $\log a$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 m', β $(0\le\beta<1)$라 하고 두 수 $\log a^{2n}$, $\log a$의 차를 k라 하면 $k=\log a^{2n}-\log a=(m+\alpha)-(m'+\beta)=(m-m')+(\alpha-\beta)$이지? 그런데 문제에서 두 수 $\log a^{2n}$, $\log a$의 소수 부분이 같다고 했으니까 $\alpha=\beta$에서 $\alpha-\beta=0$이고 m, m'은 정수이므로 $m-m'$로 정수야.

$\therefore \log a^{2n}-\log a=(m-m')+(\alpha-\beta)=m-m'=$(정수)

My Top Secret

소수 부분이 같다는 조건을 두 수의 차가 정수가 된다는 조건으로 바꾸어 활용하는 이유는 조건 (나)에서 주어진 $\log a$의 식을 이용하여 계산 실수를 줄이기 위해서라고 볼 수 있어.
왜냐하면 각 수의 소수 부분을 직접 계산해서 서로 비교하면 계산이 복잡해지기 때문에 실수하기 쉽기 때문이야.

B 130 정답 ③

1등급 킬러 [정답률 15%]

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$라 할 때, $f(ab)=f(a)f(b)+2$를 만족시키는 20 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? (4점)

① 19　② 20　③ 21　④ 22　⑤ 23

단서 a, b의 범위에 따라 $1\le ab\le 400$이니까 $f(ab)=0$ 또는 1 또는 2가 되지?

이 문제는 정수 부분을 활용하여 주어진 등식을 만족시키는 자연수를 구하는 문제이다.
이를 위해서는 정수 부분의 값의 범위를 따져보는 것이 이 문제의 키포인트이다.

[풀이 단서 체크]

❶ 먼저, $\log x$의 정수 부분인 $f(x)$는 $1\le x<10$일 때 $f(x)=0$, $10\le x<100$일 때 $f(x)=1$, $100\le x<1000$일 때 $f(x)=2$이다. a와 b는 20 이하의 자연수이므로 $f(a)$와 $f(b)$는 0 또는 1의 값을 갖고, ab는 $1\le ab\le 400$이므로 $f(ab)$는 0, 1, 2의 값을 갖는다. ⇒ 단서

❷ 이제, $f(ab)\le 2$이고 $f(a)f(b)\ge 0$인 것을 활용하여 $f(ab)=f(a)f(b)+2$에서 $f(ab)=2$이고 $f(a)f(b)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $100\le ab\le 400$이고, $1\le a<10$ 또는 $1\le b<10$이다.

주의 a와 b값의 범위에 주의하여 $a+b$의 값이 최소가 되는 경우를 찾아야한다.

핵심 정답 공식: a, b가 20 이하의 두 자연수이므로 $f(a)$, $f(b)$의 값은 0 또는 1이다. 각각에 대해 경우의 수를 나눈다.

[문제 풀이 순서]

*주어진 등식을 만족시키는 자연수 a, b의 값 구하기

1st 20 이하의 자연수 k에 대하여 $f(k)=0$ 또는 $f(k)=1$임을 이용해.

다음과 같이 두 자연수 a, b의 범위를 나누어 $f(ab)=f(a)f(b)+2$를 만족시키는 자연수 (a, b)의 순서쌍을 구하자.

주의 상용로그는 밑이 10이므로 $\log a$의 정수 부분이 자연수이려면 $a\ge 10$을 만족해야 해.

(i) $1\le a\le 9$, $1\le b\le 9$인 경우

a, b는 한 자리의 수이므로 $\log a$의 정수 부분은 0이다. a가 n자리의 수일 때, $\log a$의 정수 부분은 $n-1$이야.
마찬가지로 $\log b$의 정수 부분도 0이다.
즉, $f(a)=f(b)=0$이므로
$f(ab)=f(a)f(b)+2=0\times0+2=2$ ⋯ ㉠
그런데 $1\le ab\le 81$이므로 $\log 1=0\le \log ab\le \log 81<\log 10^2=2$
이때, ㉠에서 $f(ab)=2$이어야 하는데 $\log ab$의 정수 부분 $f(ab)$의 값은 2가 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 (a, b)의 순서쌍은 존재하지 않는다.

(ii) $1\le a\le 9$, $10\le b\le 20$인 경우

a는 한 자리의 수이고, b는 두 자리의 수이므로 $\log a$의 정수 부분은 0이고, $\log b$의 정수 부분은 1이다. a가 n자리의 수일때 $\log a$의 정수 부분은 $n-1$이야.
즉, $f(a)=0$, $f(b)=1$이므로
$f(a)f(b)+2=0\times1+2=2$ ⋯ ㉡
ab가 두 자리 수이면 $\log ab$의 정수 부분은 1이야.
이때, $10\le ab\le 180$인데, $10\le ab<100$일 때는 $f(ab)=1$이므로 ㉡에 의하여 $f(ab)=2$이면 두 자연수 a, b는 $100\le ab\le 180$을 만족해야만 한다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(5, 20)$ → 각각에서 $a+b$의 최솟값을 구할 수 있을 거야.
$(6, 17)$, $(6, 18)$, $(6, 19)$, $(6, 20)$ ⇐ $6\times16=96<100$
$(7, 15)$, $(7, 16)$, ⋯, $(7, 20)$ ⇐ $7\times14=98<100$
$(8, 13)$, $(8, 14)$, ⋯, $(8, 20)$ ⇐ $8\times12=96<100$
$(9, 12)$, $(9, 13)$, ⋯, $(9, 20)$ ⇐ $9\times11=99<100$
이므로 $a+b$의 최솟값은
$8+13=9+12=21$

(iii) $10\le a\le 20$, $1\le b\le 9$인 경우

(ii)와 마찬가지로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(iv) $10\le a\le 20$, $10\le b\le 20$인 경우

$\log a$, $\log b$의 정수 부분이 모두 1로 $f(a)=f(b)=1$이므로
$f(a)f(b)+2=1\times1+2=3$ ⋯ ㉢
$\log 100=2\le \log ab\le \log 400<\log 10^3=3$ → ab는 세 자리 수이니까 $\log ab$의 정수 부분이 2야.
이때, ㉢에서 $f(ab)=3$이어야 하는데 $100\le ab\le 400$이므로 $\log ab$의 정수 부분 $f(ab)$의 값은 3이 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 (a, b)의 순서쌍은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $a+b$의 최솟값은 21이다.

1등급 풀이 Tip

주어진 범위에서 로그의 정수 부분이 갖는 값의 범위는 한정적이므로 그 값에 따라 경우를 나누어 구할 수 있다. 따라서 a와 b의 범위를 나누고, ab의 범위를 나누어 등식을 만족시키는 경우를 구할 수 있다.

My Top Secret

주어진 등식을 성립시키는 정수의 값은 제한되어 있어. 따라서 제한된 값 각각에 대해 경우의 수를 나누어 해결하는 것이 이런 유형의 문제를 푸는 일반적인 방법이야.

상용로그의 정수 부분과 소수 부분 개념·공식

① $\log N$의 정수 부분이 n자리이면
$n<\log N<n+1$, 즉 $10^n<N<10^{n+1}$이다.
② $\log A$와 $\log B$의 소수 부분이 같으면
$\log A-\log B=$(정수)
③ $\log A$와 $\log B$의 소수 부분의 합이 정수이면
$\log A+\log B=$(정수)

B 131 정답 70 *상용로그의 활용－정수 부분과 소수 부분 [정답률 38%]

(정답 공식: $\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서 $f(x)$가 정수이므로 가능한 값은 ±1이다. 각각에 대해 $\log x$의 값을 구할 수 있다.)

양수 x에 대하여
단서1 상용로그의 정수 부분이 $f(x)$, 소수 부분이 $g(x)$야.
$\log x=f(x)+g(x)$ ($f(x)$는 정수, $0\le g(x)<1$)
이라 하자. $\{f(x)\}^2+3g(x)$의 값이 3이 되도록 하는 모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{q}{p}}$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점) 단서2 소수 부분 $g(x)$의 범위로 정수 $f(x)$의 값을 유추하여 x의 값을 찾아 볼까?

1st $\{f(x)\}^2+3g(x)=3$과 $0\le g(x)<1$을 이용하여 정수 $f(x)$의 값의 범위를 구해.

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서

$g(x)=\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}$ … ㉠이고 $0\le g(x)<1$이므로

$0\le\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}<1$ $\therefore 0<\{f(x)\}^2\le3$ → $\{f(x)\}^2=1, 2, 3$

그런데 $f(x)$는 정수이므로 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$이다.

2nd $f(x)$의 값에 따라 $\{f(x)\}^2+3g(x)=3$을 만족시키는 x의 값을 구하자.

실수 문제에서 $f(x)$는 정수라 하였으므로 $\{f(x)\}^2=1, 2, 3$일 때를 모두 고려하지 않아도 돼. 이 중에서 제곱수는 1뿐이므로 $f(x)=\pm1$일 때만 해당되겠지.

(i) $f(x)=1$일 때, ㉠에 대입하면

$g(x)=\dfrac{3-1^2}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\log x=f(x)+g(x)=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ $\therefore x=10^{\frac{5}{3}}$

[로그의 정의] $\log_a N=x \Longleftrightarrow a^x=N$

(ii) $f(x)=-1$일 때, ㉠에 대입하면

$g(x)=\dfrac{3-(-1)^2}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\log x=f(x)+g(x)=-1+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$ $\therefore x=10^{-\frac{1}{3}}$

3rd 모든 x의 값의 곱을 구하여 p, q의 값을 구할 수 있겠지?

(i), (ii)에 의하여 모든 x의 값의 곱은

$10^{\frac{5}{3}}\times10^{-\frac{1}{3}}=10^{\frac{4}{3}}$ ← $a^m\times a^n=a^{m+n}$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로 $10(p+q)=10(3+4)=70$

[다른 풀이]

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$ … ㉠에서 $f(x)$가 정수이므로 $3g(x)$도 정수여야 해. ← $3g(x)=3-\{f(x)\}^2=$(정수)$-$(정수)$=$(정수)

그런데 $0\le g(x)<1$에서 $0\le3g(x)<3$이므로 $3g(x)$의 값은 0 또는 1 또는 2야.

(i) $3g(x)=0$, 즉 $g(x)=0$일 때,

㉠에서 $\{f(x)\}^2=3$ $\therefore f(x)=\pm\sqrt{3}$ ⇒ 무리수

그런데 이것은 $f(x)$가 정수라는 조건에 맞지 않아.

(ii) $3g(x)=1$, 즉 $g(x)=\dfrac{1}{3}$일 때,

㉠에서 $\{f(x)\}^2+1=3$ $\therefore f(x)=\pm\sqrt{2}$ ⇒ 무리수

이것도 $f(x)$는 정수라는 조건에 맞지 않아.

(iii) $3g(x)=2$, 즉 $g(x)=\dfrac{2}{3}$일 때,

㉠에서 $\{f(x)\}^2+2=3$ $\therefore f(x)=\pm1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 x의 값은

$f(x)=1$, $g(x)=\dfrac{2}{3}$일 때, $\log x=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$에서 $x=10^{\frac{5}{3}}$

$f(x)=-1$, $g(x)=\dfrac{2}{3}$일 때, $\log x=-1+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$에서 $x=10^{-\frac{1}{3}}$

(이하 동일)

경찰대, 삼사 기출 문제 [2점, 3점 4점, 5점]

B 132 정답 973 *로그의 정의 [정답률 74%]

(정답 공식: $a^x=b$이면 $x=\log_a b$이고 $\log_a x=b$이면 $x=a^b$이다.)

단서1 로그의 정의를 이용하여 b를 a로, d를 c로 나타내 봐.
단서2 a, b, c, d가 자연수라는 조건이 이 문제의 핵심이야. 단서1에서 b, d가 자연수가 되기 위한 조건이 무엇인지 생각해야 해.

$\log_a b=\dfrac{3}{2}$, $\log_c d=\dfrac{3}{4}$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a-c=19$일 때, $b-d$의 값을 구하시오. (4점)
단서3 단서2에서 찾아낸 조건과 $a-c=19$를 이용하여 a, c의 값을 각각 결정할 수 있어.

1st b, d를 a, b로 나타내자.

$\log_a b=\dfrac{3}{2}$에서 $b=a^{\frac{3}{2}}$ … ㉠, $\log_c d=\dfrac{3}{4}$에서 $d=c^{\frac{3}{4}}$ … ㉡ ← $\log_a b=x \Longleftrightarrow b=a^x$

2nd a, c의 값을 각각 구하자.

a, b, c, d는 자연수이므로 ㉠에서 a는 제곱수가 되어야 하고 ㉡에서 c는 네제곱수가 되어야 한다.

즉, 가능한 a의 값은 제곱수인 4, 9, 16, 25, …이고 가능한 c의 값은 네제곱수인 16, 81, 256, 625, …이다.

이 중 $a-c=19$를 만족시키는 a와 c의 값은 $a=100$, $c=81$이다. … (★)

3rd $b-d$의 값을 구하자.

㉠에서 $b=a^{\frac{3}{2}}=100^{\frac{3}{2}}=(10^2)^{\frac{3}{2}}=10^{2\times\frac{3}{2}}=10^3=1000$이고 ← $(a^m)^n=a^{mn}$

㉡에서 $d=c^{\frac{3}{4}}=81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^{4\times\frac{3}{4}}=3^3=27$이므로

$b-d=1000-27=973$

수능 핵강

(★)에서 $a-c=19$를 만족시키는 a와 c의 값은 $a=100$, $c=81$ 뿐인지 확인해보자.

자연수 s, t에 대하여 a는 제곱수이므로 $a=s^2$이라 하고 c는 네제곱수이므로 $c=t^4$이라 하면 $a-c=19$에서 $s^2-t^4=19$야.

이를 인수분해하면 $(s+t^2)(s-t^2)=19$이고 s, t가 자연수이므로 $s+t^2$, $s-t^2$도 모두 자연수가 되어야 해. 또, 19를 두 자연수의 곱으로 나타내면 $19=1\times19$이므로 $s+t^2=1$, $s-t^2=19$ 또는 $s+t^2=19$, $s-t^2=1$이어야 해.

(i) $s+t^2=1$, $s-t^2=19$일 때,
s, t^2은 모두 자연수이므로 $s+t^2=1$을 만족시키는 경우는 없어. 따라서 $s+t^2=1$, $s-t^2=19$를 만족시키는 자연수 s, t는 존재하지 않아.

(ii) $s+t^2=19$, $s-t^2=1$일 때,
i) $s+t^2=19$에서 $t^2=1$일 때, $s=18$인데 $s-t^2=1$을 만족시키지 않아.
ii) $s+t^2=19$에서 $t^2=4$일 때, $s=15$인데 $s-t^2=1$을 만족시키지 않아.
iii) $s+t^2=19$에서 $t^2=9$일 때, $s=10$이고 $s-t^2=1$을 만족시켜.
$\therefore s=10$, $t=3$
iv) $s+t^2=19$에서 $t^2=16$일 때, $s=3$인데 $s-t^2=1$을 만족시키지 않아.
v) $t^2\ge25$이면 $s+t^2=19$를 만족시키는 자연수 s는 존재하지 않아.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 s, t의 값은 각각 $s=10$, $t=3$이므로 $a=s^2=10^2=100$, $c=t^4=3^4=81$

H 106 정답 ③ *∑의 활용 – 새롭게 정의된 수열 ····· [정답률 59%]

(정답 공식: x가 a의 n제곱근이면 x는 방정식 $x^n=a$를 만족시킨다.)

단서1 $x^n=m^{12}$를 만족시키는 x의 값이야.

자연수 $m(m\geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? (4점)

단서2 m의 값이 2, 3, 4, ⋯, 9일 때의 $f(m)$의 값을 구해서 모두 더하라는 거지?

① 37 ② 42 ③ 47
④ 52 ⑤ 57

1st $f(m)$이 의미하는 것부터 찾자.

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식 $x^n=m^{12}$ ⋯ ㉠의 근이다.
즉, $f(m)$은 ㉠을 만족시키는 정수 x가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수의 개수이다.

2nd m의 값에 따라 $f(m)$의 값을 구해.

(i) $m=2$일 때, ㉠에서 $x^n=2^{12}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 12의 양의 약수가 되어야 한다.

주의 문제의 조건에서 n이 2 이상의 자연수이므로 n의 값은 1이 될 수 없어.

따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 12로 5이다.
$x^n=2^{12}$에서 $n=2$이면 $x=\pm 2^6$으로 x의 값은 정수야. 마찬가지로 $n=3$이면 $x=2^4$, $n=4$이면 $x=\pm 2^3$, $n=6$이면 $x=\pm 2^2$, $x=12$이면 $x=\pm 2$야.
$\therefore f(2)=5$

(ii) $m=3$일 때, ㉠에서 $x^n=3^{12}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 12의 양의 약수가 되어야 한다.

실수 $12=2^2\times 3$이므로 12의 양의 약수의 개수는 $(2+1)\times(1+1)=6$인데 1을 제외해야 하므로 $6-1=5$(개)야. 이 방법을 사용하면 실수를 줄일 수 있겠지?

따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 12로 5이다.
$\therefore f(3)=5$

(iii) $m=4$일 때, ㉠에서 $x^n=4^{12}$ $\therefore x^n=2^{24}$
$4^{12}=(2^2)^{12}=2^{24}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 24의 양의 약수가 되어야 한다.
따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24로 7이다.
$\therefore f(4)=7$

(iv) $m=5$일 때, ㉠에서 $x^n=5^{12}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 12의 양의 약수가 되어야 한다.
따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 12로 5이다.
$\therefore f(5)=5$

(v) $m=6$일 때, ㉠에서 $x^n=6^{12}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 12의 양의 약수가 되어야 한다.
따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 12로 5이다.
$\therefore f(6)=5$

(vi) $m=7$일 때, ㉠에서 $x^n=7^{12}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 12의 양의 약수가 되어야 한다.
따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 12로 5이다.
$\therefore f(7)=5$

(vii) $m=8$일 때, ㉠에서 $x^n=8^{12}$ $\therefore x^n=2^{36}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 36의 양의 약수가 되어야 한다.
따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36으로 8이다.
$\therefore f(8)=8$

(viii) $m=9$일 때, ㉠에서 $x^n=9^{12}$ $\therefore x^n=3^{24}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 24의 양의 약수가 되어야 한다.
따라서 가능한 n의 값의 개수는 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24로 7이다.
$\therefore f(9)=7$

(i) ~ (viii)에 의하여

$$\sum_{m=2}^{9} f(m)=f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)$$
$$=5+5+7+5+5+5+8+7=47$$

수능 핵강

* $f(m)$의 값을 일반화하기

자연수 $k(k\geq 2)$와 소수 p에 대하여
(i) $m=p^k$, 즉 m이 p의 k제곱수이면 $x^n=(p^k)^{12}$에서 $x^n=p^{12k}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 $12k$의 양의 약수가 되어야 해.
$\therefore f(m)=(12k$의 양의 약수의 개수$)-1$
(ii) $m\neq p^k$, 즉 m이 p의 k제곱수가 아니면 $x^n=m^{12}$
이 방정식의 근 중에서 정수가 존재하려면 n은 1을 제외한 12의 양의 약수가 되어야 해.
$\therefore f(m)=(12$의 양의 약수의 개수$)-1=5$

최윤성 2023 수능 응시 · 서울 양정고 졸

이 문제는 방정식 $x^n=m^{12}$의 근 중 실근의 개수가 아니라 근이 정수가 되도록 하는 n의 개수를 묻는 문제로 새로운 유형의 문제였어.
$f(m)$을 일반화하여 문제를 풀었다면 정말 잘 한 거야. 하지만 그렇지 못했다고 해서 실망할 필요는 없어. 이 문제의 핵심은 m^{12}의 n제곱근 중 정수가 되도록 하는 n의 값의 개수를 구할 수 있느냐니까! 그러니 m 대신 2, 3, 4, ⋯, 9를 차례로 대입하여 차근차근 $f(m)$의 값을 구해 봐.

✿ a의 n제곱근 개념·공식

① n이 짝수일 때
양수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 양수와 음수 두 개이고 양인 것은 $\sqrt[n]{a}$, 음인 것은 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.
② n이 홀수일 때
실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 하나이고 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.